UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Facultad de Ciencias

Maestría en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

PROPUESTA DIDÁCTICA FUNDAMENTADA EN LA SOLUCIÓN DE SITUACIONES PROBLEMA UTILIZANDO LAS MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN Y SU INTERPRETACIÓN.

Preparado por:

Alejandra Yaneth Saldarriaga Saldarriaga

Trabajo para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas

Dirigido por:

Víctor Ignacio López Ríos, Profesor Asociado, Escuela de Estadística

Medellín, Colombia

2012

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN 1

INTRODUCCIÓN 4

CAPÍTULO 1 8

Objetivos 8

Objetivo general 8

Objetivos específicos 8

Planteamiento del problema 9

Antecedentes 10

CAPÍTULO 2 20

Marco teórico 20

¿Por qué es importante la enseñanza de las medidas de centralización en la secundaria? 24

Énfasis de las medidas de centralización en los nuevos currículos. 24

La construcción de otros conceptos a partir de las medidas de centralización. 30

El papel de las medidas de centralización en la sociedad por su aplicación en diferentes áreas de la vida diaria 32

Algunas recomendaciones existentes sobre la enseñanza de las medidas de centralización 32

CAPÍTULO 3 39

Metodología 39

CAPÍTULO 4 70

Conclusiones 70

CAPÍTULO 5 72

Anexo 1 72

Campos de problemas asociados a la media 72

Anexo 2 77

Campos de problemas asociados a la mediana 77

Anexo 3 80

Campos de problemas asociados a la moda 80

Anexo 4 82

Otros ejemplos de las medidas de posición central mostrados en Cobo, 2003 que pueden ser adaptados al contexto en el que se desempeñe el docente. 82

CAPÍTULO 6 88

Referencias 88

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Tabla de frecuencias de cantidad de tomates por árbol…….55

Tabla 2. Medidas de centralización en la producción de tomates de árbol…….56

Tabla 3. Registro de producción de leche por diez vacas en cinco días……..59

Tabla 4. Tabla de frecuencias de producción de litros de leche en cinco días…59

Tabla 5. Tabla de frecuencias de cantidad de fresas por planta……..64

Tabla 6. Medidas de centralización en la producción de fresas…….66

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Gráfica de barras de la producción de tomates de árbol por palo……55

Figura 2. Gráfico circular de la producción de tomates de árbol……..56

Figura 3. Foto de evidencias de la producción de tomates de árbol……58

Figura 4. Gráfico de barras de la cantidad de leche producida por diez vacas en cinco días……...60

Figura 5. Diagrama circular de la cantidad de leche producida en cinco días……60

Figura 6. Fotos de evidencia de la producción de leche en cinco días……63

Figura 7. Diagrama de barras de la cantidad de fresas por planta……..65

Figura 8. Diagrama circular de la cantidad de fresas por planta……..65

Figura 9. Fotos que evidencian la producción de fresas……68

RESUMEN

En este escrito se diseña una propuesta didáctica para la enseñanza de las medidas de centralización en el grado octavo de la básica secundaria, siendo útil a los docentes del área de matemáticas en cuanto que pueden mejorar el método de enseñanza de estas, realizándolo de una manera más práctica, y a los docentes de estadística en el análisis estadístico de situaciones reales interesantes para el estudiante.

Esta producción escrita resalta la solución a situaciones didácticas de la vida diaria que se encuentran en el contexto de determinado lugar, tal como analizar los diferentes productos que generan ingresos al municipio de Entrerríos (Antioquia).

A través de los trabajos realizados por estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Entrerríos, se muestra el estudio de las medidas de centralización, partiendo de una pregunta que genera un análisis estadístico basado en un determinado producto de la región del norte antioqueño como es el tomate de árbol, la leche de vaca, la papa, el aguacate, el tomate de aliño, el cultivo de moras y fresas, entre otros. Dichos trabajos permiten a los estudiantes tener una interacción constante con el medio que los rodea, y además de aprender de las medidas de centralización, también los lleva a conocer más del lugar que habitan, reconociendo que la estadística se puede aplicar a diferentes contextos y situaciones de la vida cotidiana.

En el desarrollo de este trabajo se tienen en cuenta algunos estudios realizados por autores como (Batanero, 2000), (Batanero & Godino, 2001) y Cobo (2003), quienes han dedicado gran parte de su vida a buscar ayudas para la enseñanza de la estadística, hecho que permite que en el desarrollo de este escrito se hayan tenido en cuenta varias estrategias recomendadas por ellos.

Palabras claves: estadística, medidas de centralización, diagrama de barras, diagrama circular, tabla de frecuencias, media, mediana, moda, didáctica, situaciones problema.

ABSTRACT

This job shows a methodological approach to the teaching of the measures of centralization in the eighth grade of primary school, to be useful to teachers in the area of mathematics in that it can improve the teaching method of these, performing it in a way more practical, and teachers of statistics in the statistical analysis of real situations of interest to the student.
This production highlights the solution written didactic situations of daily life that are in the context of a particular place, such as analyzing the various products that generate income to Entrerríos municipality (Antioquia).
Through the work of the eighth grade students of School Entrerríos shows the study centralization measures, based on a question that generates a statistical analysis based on a given product in the northern region of Antioquia as is the tree tomato, cow's milk, potato, avocado, tomato relish, growing blackberries and strawberries, among others. These jobs allow students to have constant interaction with their environment, and also to learn from centralization measures also leads to know more about the place they live, recognizing that statistics can

be applied to different contexts and situations of everyday life.

Keywords: statistics, measures of centralization, bar chart, pie chart, frequency table, mean, median, mode, didactic, problem situations.

INTRODUCCIÓN

La Estadística ha sido utilizada desde la antigüedad como una herramienta principalmente para realizar conteos de bienes y producción y para los censos de poblaciones. Actualmente la Estadística es una ciencia en constante desarrollo debido a la necesidad de los pueblos por lograr avances significativos en la recolección, análisis e interpretación de datos.

“Para la mayoría de los estudiantes la estadística es un tema misterioso donde operamos con números por medio de fórmulas que no tienen sentido” (Graham, 1987, p 5).

Desde hace varios años en el sistema de educación colombiano existen cinco pensamientos (numérico, métrico, algebraico, geométrico y aleatorio) que se deben tener en cuenta en la enseñanza de las Matemáticas. Es bueno aclarar que el pensamiento aleatorio ha sido dejado de lado, porque aunque aparece dentro de los estándares básicos de la educación dados por el Ministerio de Educación Nacional, en la gran mayoría de las instituciones educativas no se le ha dado la verdadera importancia, ya que son sólo unos cuantos docentes los que se interesan por enseñar estadística, pero no pasan de enseñar población y muestra, datos con sus respectivas tablas de frecuencias y gráficas sencillas, sin profundizar en el análisis e interpretación de los resultados, además muchos de los problemas analizados son descontextualizados (Batanero, 2000) lo que hace que el estudiante pierda interés por aprender la estadística, cuando es a través de

esta ciencia que se puede dar solución a muchas de las situaciones problemas de la vida diaria en diferentes áreas, por ejemplo en la economía, analizar la tasa de empleo y desempleo, las tasas de crecimiento de las diferentes actividades de entidades bancarias, la demografía, etc., en lo científico, el cambio climático, la inteligencia animal, la genética, etc.

Partiendo de lo anterior y analizando la importancia de la Estadística para la comprensión y solución de muchos de los problemas de la vida real, con esta propuesta didáctica se pretende mostrar que una manera de enseñar las medidas de centralización y su interpretación de forma agradable para el estudiante en la educación secundaria, es mediante los procesos de resolución de problemas y proyectos cortos dentro del contexto en el que viven.

En 2011, Batanero escribe que los problemas de los libros de texto se centran en los conocimientos técnicos (preparar un gráfico y calcular un promedio), mientras que los proyectos hacen que los estudiantes adquieran conocimientos estratégicos (saber cuándo hay que usar un concepto o gráfico dado). Además el proyecto contribuye a la competencia en comunicación lingüística, porque el alumno utiliza continuamente la expresión oral y escrita en la formulación y expresión de ideas. Además, los procesos de resolución de problemas y proyectos contribuyen de forma especial a fomentar la autonomía e iniciativa personal al planificar estrategias, asumir retos, aceptar la incertidumbre y controlar los procesos de toma de decisiones. También consolida la adquisición de destrezas involucradas en la competencia de aprender a aprender tales como la autonomía, la perseverancia, la sistematización, la reflexión crítica y la habilidad para comunicar con eficiencia los resultados del propio trabajo.

Retomando la teoría de (Batanero, 2011) de que “Los proyectos estadísticos aumentan la motivación de los estudiantes y que no hay que olvidar que la estadística es la ciencia de los datos y los datos no son números, sino números en un contexto, y que la principal característica de un curso basado en proyectos es que el énfasis se da a las tareas, que, al menos aproximadamente, deben ser realistas”, y también la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (1999).

El trabajo presentado acá acerca de las medidas de centralización tendrá su aplicación en un grado octavo de la Institución Educativa Entrerríos del municipio de Entrerríos (Antioquia), en el cual los estudiantes en grupos de tres o cuatro personas se formularán un problema o un proyecto corto basado en una pregunta relacionada con los productos generados en dicho municipio, es decir mediante la recolección de datos reales se realizará un análisis estadístico que les ayudará en algunos casos a mejorar su productividad o en otros a saber negociar sus productos y así obtener mayores beneficios, además de ayudarles a comprender el significado de las medidas de centralización, para que las sepan utilizar en cualquier problema de su vida diaria.

La realización de este trabajo surge de mi propio interés como docente del área de matemáticas y motivada a enseñar la estadística en la secundaria de forma diferente a la habitual.

La tesis se organiza en seis capítulos iniciándose en el capítulo 1 con los objetivos, el planteamiento del problema y los antecedentes.

En el capítulo 2 se describe el marco teórico sobre el cual se fundamenta este trabajo, se resalta la importancia de la enseñanza de las medidas de centralización en la secundaria, lo que pasa con la enseñanza de la estadística en los nuevos currículos, los conceptos y aplicaciones que se derivan de las medidas

de centralización en las diferentes áreas de la vida diaria y algunas recomendaciones existentes sobre la enseñanza de las medidas de centralización.

En el capítulo 3 se explica la metodología empleada para la realización de este trabajo con los estudiantes de grado octavo. La metodología empleada para el desarrollo del trabajo es la metodología cualitativa “Investigación – Acción” la cual contribuye al desarrollo profesional de los docentes y facilita innovaciones educativas (Elliot, 2000).

La Investigación - Acción consta de las siguientes fases: (I) diagnóstico que se refiere al estudio del problema, (II) elaboración y estrategia de la propuesta de solución, (III) aplicación de la solución y comunicación de los resultados. Lo más importante que se resalta en esta parte son los trabajos realizados por los estudiantes.

En el capítulo 4 se encuentran las conclusiones encontradas con relación a los diferentes objetivos planteados.

En el capítulo 5 se encuentran los anexos que brindan una serie de campos de problemas asociados a las medidas de centralización la media, la mediana y la moda sugeridos por Cobo (2003), y Batanero y Godino (2001).

Por último en el capítulo 6 se tienen las referencias utilizadas como soporte para la realización de esta tesis.

CAPÍTULO 1

Objetivos

Objetivo general

Diseñar una propuesta didáctica útil a los docentes del área de las matemáticas, la cual le permita despertar en los estudiantes un interés particular por el análisis e interpretación de las medidas de centralización, basados en la resolución de problemas reales dentro del contexto en el que viven.

Objetivos específicos

- Sugerir al lector una manera práctica de enseñar a sus estudiantes las medidas de tendencia central.
- Despertar en los estudiantes el interés por el estudio de la Estadística.
- Contribuir con el desarrollo personal del estudiante, fomentando un razonamiento crítico que parta desde los conocimientos previos hasta llegar a una valoración objetiva.
- Involucrar el contexto productivo del municipio de Entrerríos para la aplicación de las medidas de tendencia central a través de la resolución de problemas reales.

Planteamiento del problema

En la educación colombiana ha existido la enseñanza de la estadística desde hace tiempo, aunque la escuela se ha centrado en una enseñanza tradicional de tablero y tiza, en donde se ha dedicado a la aplicación algorítmica de fórmulas y la elaboración mecánica de tablas y gráficas, dejando de lado la interpretación, además los docentes se basan en problemas muchas veces descontextualizados, lo que hace que los estudiantes no se interesen por aprender la estadística, esto en los casos en que el docente alcanza a dar el tema o unidad de estadística, porque tal como lo muestran los textos guías de matemáticas en educación secundaria, la estadística está relegada a la última unidad del libro y solo se dicta si alcanza el tiempo.

Son pocas las instituciones educativas que en la actualidad tienen la estadística como una asignatura dentro de su pensum académico, por lo general son aquellas instituciones que tienen una enseñanza técnica o tecnológica respaldada por instituciones como el SENA (Servicio Nacional de Aprendizaje).

Retomando lo dicho en el módulo 5 “Pensamiento Aleatorio y Sistemas de Datos”, del diplomado en Desarrollo de Competencias Básicas en Matemáticas en la Educación Básica y Media del Departamento de Antioquia que dice: ”se requieren maestros que diseñen actividades con enfoques exploratorios, que le permitan al estudiante investigar y obtener sus propios datos o complementar los dados por el docente, y hacer énfasis en la elaboración de tablas y gráficas como una forma de sistematizar los valores obtenidos en los experimentos originales para el estudio de la distribución de frecuencias.” Y agregándole a esto la interpretación de los datos, es lo que me ha motivado a desarrollar esta unidad

didáctica basada en la pregunta ¿Cómo despertar en los estudiantes del grado octavo el interés por el aprendizaje, análisis e interpretación de las medidas de centralización?, también con el ánimo de aportar un poco a la creación de la cultura estadística dentro de nuestro currículo, para que los estudiantes tengan una observación crítica constructiva que ayude al crecimiento del país, ya que la estadística actualmente juega un papel muy importante en nuestra sociedad que vive en constante cambio.

Antecedentes

La gran mayoría de investigaciones en la estadística no tienen en cuenta el problema de la enseñanza, sino que se centran en la comprensión de las ideas de estadística y probabilidad. Dentro de las investigaciones revisadas se encontró muy poco sobre la práctica normal de las clases, la enseñanza, los textos guías y criterios de evaluación. Son pocas las investigaciones centradas en el análisis de estudiantes entre 12 y 15 años, que es la edad para la cual se realiza este trabajo (estudiantes de grado octavo en educación secundaria).

Aunque la Asociación Internacional para la Educación Estadística (IASE, sociedad que realiza conferencias internacionales de educación estadística desde 1998) y los congresos internacionales de estadística han permitido avanzar un poco en la investigación acerca de la enseñanza y aprendizaje de las medidas de centralización en los estudiantes de la secundaria y de la universidad, es necesario continuar con la investigación en este campo.

Teniendo en cuenta el marco teórico de este trabajo, en cuanto a las situaciones didácticas para la enseñanza de la estadística en los grados octavo, se muestra a continuación un resumen de investigaciones en este tema:

Dentro de la enseñanza de la estadística se deben tener en cuenta los siguiente cinco elementos llamados elementos de significados: (Merino, 2003)

Campos de problemas: Son la entidades fenomenológicas que inducen situaciones-problemas y aplicaciones de donde surge el objeto.

Algoritmos y procedimientos: se refiere a las formas de realizar procedimientos, algoritmos, operaciones. Los estudiantes realizan distintos tipos de algoritmos para resolver situaciones problemas o para comunicar la solución a otras personas, validar y generalizar la solución en otros contextos y problemas. Sería característico en la solución de problemas de promedios sumar una serie de valores y dividir por el número de sumandos (media), encontrar el valor más frecuente en una tabla de frecuencias (moda), calcular las frecuencias acumuladas y hallar el valor al que corresponde la mitad del número total de datos (mediana).

Lenguaje: se refiere a los términos, expresiones, símbolos, tablas y gráficos utilizados en la actividad matemática. Las notaciones, gráficos, palabras y en general todas las representaciones del objeto abstracto, como los términos "media", "valor medio", "promedio", que podemos usar para referirnos al concepto.

Definiciones y propiedades: son los conceptos o proposiciones que previamente conoce el estudiante y que utiliza, además de los símbolos para dar solución a las situaciones problemas.

Argumentos: son los razonamientos que se utilizan para validar las soluciones de los problemas o explicar a otra persona la solución. La forma más

característica de validación en matemáticas es de tipo deductivo y ésta es la más extendida en los libros. Este tipo de argumentación se completa o sustituye, dependiendo del nivel educativo por otras como la búsqueda de contraejemplos, generalización, análisis y síntesis, simulaciones con ordenador, demostraciones informales, entre otras.

Estos elementos de significado contribuyen a enfocar de forma completa la problemática del diseño de situaciones didácticas y la evaluación de los conocimientos del sujeto, en la que deben ser tenidos en cuenta dichos elementos.

Russell y Mokros (1991) realizaron una investigación sobre ideas previas que tenían los estudiantes acerca de valores representativos de un conjunto de datos, como la media, obtuvieron como resultado que la introducción del algoritmo para realizar los cálculos, sin tener en cuenta los conocimientos informales previos de los estudiantes, provoca una especie de "corto-circuito" que da lugar a que éstos abandonen sus intuiciones sobre representatividad y se queden únicamente con un algoritmo fácil de aplicar, aunque carente de significado.

Se necesitan tres tipos de capacidades para la comprensión de la idea de Valor típico. Russel y Mokros (1991):

a) Dado un conjunto de datos, comprender la necesidad de emplear un valor central y elegir el más adecuado.

b) Construir un conjunto de datos que tenga un promedio dado.

c) Comprender el efecto que, sobre los promedios (media, mediana o moda), tiene un cambio en todos los datos o parte de ellos.

Los autores estudiaron las concepciones que un grupo de estudiantes entre 10 y 14 años tienen sobre los valores de centralización, para ello emplearon

problemas que trataban las capacidades anteriores, obteniendo como resultado que la segunda era la más difícil, ya que para los estudiantes resulta más difícil construir un conjunto de datos que tenga un promedio dado.

En una investigación realizada por Cai (1995) se encontró que de 250 estudiantes entre 11 y 12 años en Estados Unidos el 88% de ellos conocen el algoritmo de cálculo de la media y sólo el 50% de ellos son capaces de resolver problemas abiertos al aplicar este concepto. Según ella este resultado muestra que se está dando demasiada importancia a la enseñanza de algoritmos dejando atrás otras cuestiones importantes.

Batanero (2000) realizó un estudio acerca de las dificultades de comprensión de las propiedades de los promedios, y llegó a la conclusión de que la aproximación al estudio de los estadísticos de posición central basada en la definición algorítmica y el cálculo con datos descontextualizados no permite que los estudiantes lleguen a una comprensión integral del concepto de promedio.

Según Carvalho (1998; 2001) algunos errores de cálculo en media, mediana y moda encontrados en trabajos realizados por estudiantes entre 13 y 14 años en sus clases son:

Moda: Tomar la mayor frecuencia absoluta.

Mediana: No ordenar los datos para calcular la mediana; calcular el dato central de las frecuencias absolutas ordenadas de forma creciente; calcular la moda en vez de la mediana; equivocarse al calcular el valor central; tomar como mediana el valor central de las frecuencias de la tabla.

Media: Hallar la media de los valores de las frecuencias; no tener en cuenta la frecuencia absoluta de cada valor en el cálculo de la media.

Además en un estudio anteriormente se dio cuenta que los estudiantes al calcular los promedios presentan mucha más respuestas erróneas si se les presentan los datos gráficamente en vez de una tabla. A esta misma conclusión llegaron Gattuso y Mary (1998) al analizar los resultados de los trabajos realizados por estudiantes entre 14 y 17 años acerca de la comprensión del algoritmo de cálculo, basados en problemas con diferentes contextos y formas de representación.

Para la comprensión de la mediana, según Barr (1980) los estudiantes interpretan la mediana como el centro de algo, pero muchas veces sin comprender a qué se refiere ese algo. Considera que los estudiantes no entienden que la mediana es un estadístico que se refiere al conjunto de datos ordenados, porque aunque se les dé los datos en forma de lista no ven la necesidad de ordenarlos para calcular la mediana.

Según Watson y Moritz (2000) se mejoran la comprensión de los promedios por parte de los estudiantes si se definen los siguientes niveles de desarrollo evolutivo:

Pre-promedio: No se llega a usar la idea de promedio, ni siquiera en lenguaje coloquial o en contextos cotidianos. Los estudiantes no llegan a ver los datos como algo que pueda ser resumido. Responden a las preguntas sobre tareas simples inventando historias imaginativas.

Uso coloquial de la media: Se usa el término promedio o media en el lenguaje ordinario, interpretándolo como normal o bueno, se emplean ideas imaginarias en el contexto de la tarea para apoyar respuestas uni-estructurales. Se relaciona con la idea de suma, pero no se conoce el algoritmo correcto, no se comprende el significado, pocos progresos en tareas complejas.

Respuesta multi-estructural: Se usan varias ideas como máximo, mínimo y suma más división para describir la media en situaciones sencillas, aunque no se es capaz de aplicarlo en situaciones complejas. Se producen errores en los algoritmos de cálculo o se confunden media, mediana y moda. Existen conflictos cognitivos entre el cálculo de la media y el concepto.

Media como representante: Se asocia la media con su algoritmo en situaciones sencillas. Recurren al algoritmo de cálculo para describir los conceptos. Se relaciona el algoritmo con la posibilidad de un resultado no entero. Se expresa alguna idea de representatividad para la estimación o predicción en un conjunto de datos. No se sabe aplicar en contextos complejos sin ayuda y con frecuencia se prefiere usar las características visuales de los gráficos en lugar de sus promedios.

Aplicación en un contexto complejo: Además de las capacidades del nivel anterior es capaz de invertir el algoritmo para hallar el total a partir de la media o calcula medias ponderadas (no las dos cosas a la vez). No tiene clara la idea de distribución, raramente usan la media para comparar más de un conjunto de datos.

Aplicación en dos o más contextos complejos: Además del anterior, es capaz a la vez de invertir el algoritmo para hallar el total a partir de la media y calcular medias ponderadas. Comprende la idea de distribución. Usan la media frecuentemente para comparar dos o más conjuntos de datos.

Sus datos sugieren que los estudiantes progresan en estos niveles sucesivos conforme aumentan en edad.

En una investigación a cerca de la comprensión de las medidas de posición central (Carvalho, 2001), analiza el efecto que el trabajo cooperativo (grupo

experimental) tiene sobre el desarrollo de la capacidad lógica y sobre el aprendizaje de conceptos estadísticos elementales. Para ello proporciona a los alumnos lo que la autora llama “tareas estadísticas no habituales” que corresponden a problemas sencillos y abiertos sobre estadística. Los problemas habituales serían los recogidos en los libros de texto y empleados en clase por los profesores portugueses que se limitan a tareas de cálculo y representación gráfica. Trata también de comparar con el aprendizaje de alumnos que trabajan con metodología y tareas tradicionales (grupo control). De acuerdo a la organización de los estudiantes en los grupos experimental y de control le sirvió para evaluar el progreso en el post-test.

Después de realizar el trabajo con los grupos por dos años consecutivos encontró que hubo mejores resultados en el segundo año, además los estudiantes que trabajaron de forma cooperativa mostraron más avance en el desarrollo lógico y en sus competencias estadísticas que los del grupo de control (metodología tradicional). También encontró que es preferible formar parejas de alumnos heterogéneas en cuanto a sus capacidades y conocimientos y que esto beneficia no sólo al alumno que se encuentra en nivel inferior, sino también a su compañero.

La investigación muestra finalmente que los conceptos estadísticos causan dificultades a los estudiantes, incluso en el trabajo cooperativo y experiencias no habituales. Ella dice que aunque se resuelven los problemas, el aprendizaje es con frecuencia memorístico y que no se llega a una comprensión profunda. En cuanto a la interpretación de los gráficos, Curcio (1989) describe tres niveles distintos de comprensión de los gráficos, que pueden aplicarse a las tablas y gráficos estadísticos y dependen de la complejidad de las tareas involucradas:

"Leer los datos": Este nivel de comprensión requiere una lectura literal del gráfico; no se realiza interpretación de la información contenida en el mismo. Se refiere a la capacidad de leer las etiquetas y escalas del gráfico, comprender a qué se refieren y leer los valores representados. En una tabla de frecuencias sería leer los rótulos, valores de las variables y frecuencias que les corresponden.

"Leer dentro de los datos": Incluye la interpretación e integración de los datos en el gráfico; requiere la habilidad para comparar cantidades y el uso de otros conceptos y destrezas matemáticas. Por ejemplo, en un diagrama de barras sería la capacidad de determinar la moda, o comparar dos diagramas de barras de una misma variable en dos grupos. Ello supone la habilidad de comparación, además de la lectura del gráfico.

"Leer más allá de los datos": Requiere que el lector realice predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico.

Con esta investigación el autor encontró que se presentaron más dificultades en "leer dentro de los datos" y "leer más allá de los datos". Basado en estos tres niveles de comprensión el autor Wainer (1992) clasificó el tipo de preguntas que se pueden realizar a partir de un gráfico, nombrando tres niveles:

Nivel elemental: Preguntas relacionadas únicamente con la extracción de datos directamente del gráfico.

Nivel intermedio: Preguntas relacionadas con la evaluación de tendencias basándose en una parte de los datos.

Nivel superior: Preguntas acerca de la estructura profunda de los datos presentados en su totalidad, usualmente comparando tendencias y viendo agrupaciones.

Batanero (2000), concluye en uno de sus trabajos que “los conceptos estadísticos, incluso los más sencillos como la media, mediana y moda tienen un significado complejo y por tanto será necesario un período dilatado de enseñanza a lo largo de la educación primaria y secundaria para lograr el progresivo acoplamiento de los significados personales que construyen los alumnos a los significados institucionales que pretendemos adquieran. Tradicionalmente, en el aprendizaje de la estadística, se ha dado una gran importancia al cálculo y a los aspectos actuativos (habilidad operatoria en los diferentes algoritmos y procedimientos relacionados con el concepto), que ahora pierden importancia, debido a las nuevas tecnologías. En lugar de tener que ejercitarse en la realización con lápiz y papel de cálculos y gráficos, el alumno debe aprender el uso de calculadoras gráficas y programas de computador, como la hoja de cálculo. Las nuevas tecnologías introducen también nuevos elementos actuativos y ostensivos (las notaciones y palabras con que lo denotamos y en general todas sus representaciones), ya que el rango de representaciones disponibles es mucho mayor. Permiten también plantear situaciones de aprendizaje en las que el alumno se enfrente a problemas más reales cuya solución requiera el uso y aprendizaje de conceptos estadísticos. Estas situaciones requieren también el trabajo cooperativo, motivan el interés del alumno y le permiten explorar tanto los datos, como los conceptos implicados, reforzando los elementos intensivos (definiciones y propiedades) y validativos (capacidad de argumentar y justificar propiedades, relaciones y soluciones de problemas). Por supuesto la enseñanza de la estadística en la escuela usando computadores requiere una planificación cuidadosa. Frecuentemente los datos reales son demasiado complejos y es necesario tomar versiones simplificadas de los conjuntos de datos. Si queremos

mostrar una cierta propiedad, será preciso a veces manipular el conjunto de datos, para, por ejemplo conseguir que el valor de la media, mediana y moda sean marcadamente diferentes. El trabajo con computador debe, además, ser complementado con otras situaciones encaminadas a que el alumno se familiarice con los campos de problemas, las representaciones, tipos de prácticas y propiedades de los promedios, y que ejercite su capacidad de argumentación. Las distintas situaciones problemáticas pueden servir de partida para plantear en clase situaciones didácticas que contribuyan a lograr este aprendizaje".

Como conclusión de las investigaciones previas a cerca de las medidas de tendencia central, se puede decir que en la revisión literaria se encontró mucho a cerca de la media y muy poco de la moda y la mediana. También se encontró muy poco a cerca de la interpretación de las gráficas, simplemente en varias investigaciones se habló que los estudiantes realizan mejores análisis de los datos representados en tablas, que representados en los diferentes gráficos, pues a ellos se les dificulta sacar conclusiones veraces de las gráficas. Además basado en el marco teórico de este trabajo en cuanto situaciones didácticas para el análisis de las medidas de centralización, sólo unas cuantas investigaciones hablan del trabajo con situaciones de la vida real en un contexto determinado.

En vista de que los problemas reales o proyectos (cortos para la secundaria) aumentan la motivación de los estudiantes y contextualizan la estadística, además de que los datos tienen un significado y tienen que ser interpretados, en lo que sigue se hablará acerca de la enseñanza de las medidas de centralización basada precisamente en situaciones problemas de la vida diaria.

CAPÍTULO 2

Marco teórico

Dentro de la resolución de problemas deben estar incluida las situaciones didácticas, para generar en el estudiante inquietudes que lo lleven a investigar más allá del tema en cuestión, y así poder ayudarse a construir su propio conocimiento, partiendo también de los conocimientos previos que pueda tener éste, para al final alcanzar un aprendizaje significativo, el cual no se da con la enseñanza tradicional. Según Freire (1992) la educación padece de la enfermedad de la narración que convierte a los alumnos en contenedores que deben ser llenados por el profesor, y cuanto mayor sea la docilidad del receptáculo para ser llenado, mejores alumnos serán. Esto lo dice él refiriéndose a la educación tradicional en la cual la relación se encuentra sólo entre docente – estudiante, mientras que según Brousseau (1999) deben intervenir tres elementos fundamentales en la educación, el docente, el estudiante y el medio didáctico, además dice él que las situaciones didácticas moldean el proceso de enseñanza-aprendizaje, proceso en el cual el docente y el estudiante establecen unas reglas para el desarrollo de éstas, como si fuera un juego del cual estamos aprendiendo.

La situación didáctica debe ser diseñada por el profesor con el fin de que los estudiantes adquieran un saber determinado. La situación didáctica se planifica con base en actividades problematizadoras, cuya necesidad de ser resueltas o abordadas, implique la emergencia del conocimiento matemático en un escenario

llamado medio didáctico. El medio didáctico es el conjunto de interacciones entre el saber, el profesor y el estudiante.

Según Ramayo, C. M. (2009) en las situaciones didácticas escolares, se recomienda que los profesores tomen en cuenta las siguientes consideraciones para la construcción del conocimiento estadístico: Predicciones sobre fenómenos aleatorios, Contextualización de los problemas, Representación tabular y gráfica de un conjunto de datos, Análisis de la variación de datos, Construcción de algoritmos, Toma de decisiones, Investigación de campo, Dificultades y errores que los estudiantes presentan durante el tratamiento de los conceptos estadísticos.

De esta manera, se esperaría propiciar que los estudiantes generen argumentos para construir su conocimiento estadístico y aplicarlo ante cualquier situación de la vida cotidiana.

Dentro de las situaciones didácticas se encuentran unos momentos llamados situaciones a-didácticas, éstas se refieren al trabajo que realiza el estudiante cuando interactúa con el medio preparado por el profesor, el docente debe procurar porque el estudiante se responsabilice de trabajar en el problema y si no logra la solución, por lo menos que tenga aproximaciones según los objetivos propuestos. Es en estas situaciones a-didácticas en donde se debe observar al estudiante cómo se las arregla para dar solución al problema que demande el docente o el mismo con la pregunta que esté estudiando.

En una situación didáctica, debe quedar claro el acuerdo en el que profesor y estudiante declaran conocer lo que espera el uno del otro y cómo lo van a llevar a cabo.

La teoría de Brousseau (1999) plantea unas situaciones didácticas y considera que deben terminar en una situación a-didáctica, es decir, en un proceso de confrontación del estudiante y el problema propuesto (medio didáctico).

Dentro de las situaciones didácticas se tienen:

Situación de acción: en ésta el estudiante debe interactuar individualmente con el medio didáctico (situación problema) para llegar a su solución y a la adquisición de conocimientos. Se favorecen los procesos de experimentación y el descubrimiento.

Situación de formulación: acá se da la interacción de un grupo de estudiantes con el medio didáctico. Cada integrante del grupo debe participar del proceso de solución del problema. De esta manera se motiva la comunicación de ideas y se socializan las experiencias para la construcción del conocimiento.

Situación de validación: después de que los estudiantes han interactuado de forma individual o grupal con el medio didáctico, se pone a juicio de un interlocutor o del grupo el producto obtenido de esa interacción. Se valida la veracidad de los resultados obtenidos con los formulados por la cultura científica. En resumen, Brousseau pretende crear una teoría que permita explicar las situaciones de aula y que potencialice una interrelación entre el docente, el estudiante y un saber, y no plantea situaciones didácticas para favorecer una enseñanza-aprendizaje tradicional.

La aplicación en el contexto del municipio de Enterrrríos se realiza según los pasos del ciclo investigador de Wild y Pfannkuch (1999), que se basa en el modelo problema, plan, datos, análisis y conclusiones (PPDAC). En este ciclo, los estudiantes deben generarse una pregunta (problema) sobre la cual se establece un plan de trabajo teniendo en cuenta el sistema de medición a utilizar,

el manejo de los datos, el tratamiento y análisis de estos, después de determinar el plan de trabajo se realiza la recolección de datos, tratamiento y análisis de estos para generar una hipótesis o aceptar o refutar la hipótesis prevista para la solución del problema planteado, y por último se sacan las conclusiones pertinentes de acuerdo a la interpretación de los resultados del análisis hecho y el surgimiento de nuevas ideas con respecto al tema en cuestión.

El aprendizaje significativo de Ausubel, Novak, & Hanesian (1983) es otro referente teórico en el cual el aprendiz relaciona de manera sustancial la nueva información con sus conocimientos y experiencias previas, además se requiere que el estudiante tenga una disposición para aprender significativamente. También son muy importantes las experiencias educativas y la forma como se plantean los materiales de estudio.

Si se logra el aprendizaje significativo en los estudiantes, se podría decir que el aprendizaje memorístico o mecánico no haría parte de la estadística.

Para alcanzar el aprendizaje significativo en los estudiantes se tendrá en cuenta la Didáctica de la Estadística de Carmen Batanero y Juan D. Godino (2001;2002), dos grandes representantes de la Universidad de Granada (España) en el estudio y enseñanza de la Estadística, estos se han basado en la didáctica para la enseñanza de las Matemáticas.

El currículo y estándares del pensamiento aleatorio del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2005) son otros referentes teóricos, pues no se puede dejar de lado lo establecido por el MEN en Colombia. De acuerdo al MEN en los grados octavo a noveno se deben realizar interpretaciones de las Medidas de Centralización, además de saber seleccionar y usar algunos métodos estadísticos adecuados, según el tipo de información que se tenga.

¿Por qué es importante la enseñanza de las medidas de centralización en la secundaria?

Dentro del pensamiento matemático es necesario construir dos líneas diferentes, una que es exclusivamente determinista, y otra que se encarga de estudiar el conjunto de situaciones que dependen de los fenómenos aleatorios. Por ejemplo, la velocidad con que cae un cuerpo desde una altura determinada, es un experimento determinista, mientras que un fenómeno aleatorio puede ser el lanzamiento de un dado, del cual no es posible determinar el valor que se obtendrá en cada lanzamiento Cisneros, 2007.

Algunos aspectos por los que se debe enseñar las medidas de centralización en la secundaria pueden ser:

1. El énfasis que se les da en los nuevos currículos.
2. La construcción de otros conceptos estadísticos a partir de ellas.
3. El papel de éstas en la sociedad por su aplicación en diferentes áreas en la vida diaria.

Énfasis de las medidas de centralización en los nuevos currículos.

España, Estados Unidos y México son países que han venido investigando a cerca de la enseñanza de la estadística en la secundaria, y se han dedicado a analizar sus currículos para introducirla en ellos. A continuación se muestra de forma general aspectos de las medidas de centralización en sus currículos.

Según el Ministerio de Educación y Ciencia de España (MEC) en el Decreto de Enseñanzas Mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria 2006 las medidas de centralización se deben enseñar a partir del segundo curso (para estudiantes entre doce y trece años), donde se estudia el significado, cálculo, aplicación e interpretación de la media, la mediana y la moda, continuando con ellas en el tercer curso donde se utilizan en la solución de problemas y se tiene una actitud crítica frente a la información estadística.

Segundo curso:

a) Frecuencias absolutas y relativas, ordinarias y acumuladas. Diagramas estadísticos. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos.

b) Medidas de centralización: media, mediana y moda. Significado, estimación y cálculo.

c) Utilización de las propiedades de la media para resolver problemas.

d) Utilización de la media, mediana y moda para realizar comparaciones y valoraciones. Utilización de una hoja de cálculo para organizar los datos, realizar los cálculos y generar los gráficos más adecuados.

Tercer Curso:

a) Necesidad, conveniencia y representatividad de una muestra. Métodos de selección aleatoria y aplicaciones en situaciones reales.

b) Atributos y variables discretas y continuas. Agrupación de datos en intervalos. Histogramas y polígonos de frecuencias. Construcción de la gráfica adecuada a la naturaleza de los datos y al objetivo deseado.

c) Media, moda, cuartiles y mediana. Significado, cálculo y aplicaciones. Análisis de la dispersión: rango y desviación típica. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica. Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones. Actitud crítica ante la información de índole estadística.

d) Utilización de la calculadora y la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar cálculos y generar las gráficas más adecuadas. Experiencias aleatorias.

e) Sucesos y espacio muestral. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos. Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.

En Estados Unidos se tienen dos documentos: Los principios y estándares para la matemática escolar (NCTM 2000), y el proyecto GAISE de Franklin et al. 2007 que son los que han influido para mejorar la educación estadística en este país y en muchos otros que los han tomado como ejemplo.

Según los estándares del NCTM 2000 con respecto a las medidas de centralización los estudiantes deben:

a) Comprender los histogramas, gráficos de cajas paralelos y gráficos de dispersión y usarlos para representar datos.

b) Calcular estadísticos básicos y comprender la diferencia entre estadístico y parámetro.

c) Usar las simulaciones para explorar la variabilidad de los estadísticos muestrales de una población conocida y para construir las distribuciones en el muestreo parámetro.

d) Describir su forma, seleccionar y calcular los estadísticos resumen.

e) Usar las simulaciones para explorar la variabilidad de los estadísticos muestrales de una población conocida y para construir las distribuciones en el muestreo.

f) Comprender cómo los estadísticos muestrales reflejan el valor de los parámetros poblacionales y usar las distribuciones en el muestreo como base para inferencias informales.

g) Evaluar informes publicados que se basan en datos para examinar el diseño del estudio, la adecuación del análisis de datos y la validez de las conclusiones.

h) Comprender cómo las técnicas básicas de estadística se usan para monitorizar procesos característicos en lugares de trabajo.

i) Saber Cómo interpretar resultados estadísticos en el contexto.

j) Cómo criticar/interpretar noticias y artículos periodísticos que incluyan información estadística identificando los errores en la presentación y defectos en los estudios o en los métodos utilizados para generar la información.

Los estudiantes deben realizar su trabajo con datos de censos, internet, variedad de gráficos, además deben hacer uso del software para los análisis respectivos.

De acuerdo al proyecto GAISE (Proyecto de los Lineamientos para la Evaluación e Instrucción en Educación Estadística) los cursos se mejorarían si se tuviera énfasis en:

a) Reconocer que la variabilidad es ubicua en muchos fenómenos cotidianos. La variabilidad es la esencia de la estadística como disciplina y no puede ser entendida sólo mediante estudio y lectura, sino que debe ser experimentada.

b) Reconocer que la variabilidad puede ser medida y explicada, tomando en consideración los parámetros de tendencia central.

c) Hacer énfasis en los datos y conceptos, y menos en los algoritmos.

d) En la mayor medida de lo posible, los cálculos y gráficos deben ser automatizados, dedicando el tiempo a actividades de interpretación.

e) Como regla, los profesores de estadística deberían basarse mucho menos en las lecciones magistrales y mucho más en las alternativas tales como proyectos, ejercicios de laboratorio y resolución de problemas en equipo y discusión de actividades/resultados. Incluso dentro de una clase típica, es posible hacer que los estudiantes participen más activamente.

En México desde el primer grado se les enseña estadística a los estudiantes, pero desde septiembre de 2006 se dio inicio a un nuevo plan de estudios en el que se debe destacar la interculturalidad entre las áreas. En cuanto a las medidas de centralización (media, mediana y moda) tienen los siguientes cursos:

a) Primer curso: Interpretación y análisis a partir de gráficas. Comparar el comportamiento de dos o más conjuntos de datos referidos a una misma situación o fenómeno a partir de sus medidas de tendencia central.

b) Segundo curso: Propiedades de la media, media ponderada. Comparación de dos distribuciones usando el rango y las medidas de tendencia central. Interpretar y calcular las medidas de tendencia central de un conjunto de datos agrupados, considerando de manera especial las propiedades de la media aritmética

c) Tercer Curso. Comparación de dos distribuciones y formulación de inferencias utilizando la forma de las distribuciones, el rango y las medidas de tendencia central de los conjuntos de datos. Medidas de tendencia central y dispersión representación de la información. Interpretar, elaborar y utilizar gráficas de caja brazos de un conjunto de datos para analizar su distribución a partir de la mediana o de la media de dos o más poblaciones.

En Colombia desde 1996 se introdujo de manera significativa la estadística dentro del currículo de la enseñanza de las matemáticas y actualmente se tienen los siguientes estándares para el Pensamiento Aleatorio y Sistemas de Datos para los grados octavo y noveno: (MEN web)

a) Reconocer que, diferentes maneras de presentar la información, pueden dar origen a distintas interpretaciones.

b) Interpretar analítica y críticamente información estadística proveniente de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas)

c) Interpretar conceptos de media, mediana y moda.

d) Seleccionar y usar algunos métodos estadísticos adecuados según el tipo de información

e) Comparar resultados experimentales con probabilidad matemática esperada

f) Resolver y formular problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas)

g) Reconocer tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas.

h) Calcular probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).

i) Usar conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia...).

La construcción de otros conceptos a partir de las medidas de centralización.

Las medidas de centralización se necesitan para la comprensión de otros conceptos estadísticos (utilizados mayormente en la estadística de la universidad), como por ejemplo, el de variable estadística (variable aleatoria) y sus distribuciones, ya que según Batanero (2000) estas distribuciones se caracterizan por las medidas de posición central y dispersión.

Al introducirse en las familias de distribuciones de probabilidad, se puede observar que la media es con frecuencia uno de los parámetros de muchas distribuciones, como la Exponencial, Poisson, Normal, entre otras. Para

seleccionar la distribución específica a utilizar de acuerdo al problema presente, dentro de una de estas familias de distribuciones es necesario la comprensión de la media y sus propiedades.

La idea de media es utilizada en la teoría de muestreo, por las propiedades de la media muestral, y ésta a su vez es un estimador eficiente y suficiente de la media poblacional, además tiene mínima varianza. Los teoremas de límite indican, adicionalmente, que se puede considerar que la distribución muestral es aproximadamente normal para muchos estadísticos (media, proporción, mediana, correlación, etc.) con tal de que la muestra sea suficientemente grande (Alvarado, 2007). Estos teoremas mejoran la estimación de la media en muchas situaciones de inferencia, debido a que la distribución normal queda determinada por la media y desviación típica.

La teoría de regresión y correlación, y los múltiples métodos estadísticos basados en ella (correlación y regresión múltiple, modelos estadísticos de varios tipos), se basan en la definición de ecuaciones que estiman la media de una variable en función de los valores de otra variable o de una combinación de variables. Gran parte de la estadística no paramétrica, por otro lado, se basa en el estudio de los estadísticos de orden y la comparación de la mediana en uno o varios grupos.

En conclusión si no se tiene una comprensión clara de la media y la mediana se tendrán muchas dificultades en estudios posteriores de temas estadísticos.

El papel de las medidas de centralización en la sociedad por su aplicación en diferentes áreas de la vida diaria.

Las medidas de centralización son muy utilizadas en la vida diaria, en especial la media y sus aplicaciones para estimaciones por ejemplo, de la esperanza de vida, los costos o índices de precios, la tasa de natalidad, la renta per cápita, el valor más probable en predicciones, el cálculo del centro de gravedad en geometría, entre otros, todos estos mostrados en los medios de comunicación nacionales e internacionales, además de ser utilizadas en muchas profesiones o áreas del currículo como ciencias sociales, ciencias naturales, economía y política, etc, hablando de éstas en la secundaria.

Algunas recomendaciones existentes sobre la enseñanza de las medidas de centralización

Es claro que las medidas de centralización hacen parte de los análisis estadísticos, y que actualmente en muchos países hay un interés alto por la enseñanza de la estadística dentro del currículo educativo, porque aunque desde la década de los años 70 se ha implementado la estadística al interior del área de las matemáticas, no se le ha dado la verdadera importancia. En Colombia, particularmente en 1998, se publicaron los lineamientos curriculares de matemáticas, que incluyen la estadística como una parte de ésta y se socializaron con los diferentes docentes (Cisneros, 2007).

Según Gal (2002) la educación estadística es una demanda cada vez más urgente de nuestras sociedades modernas, ya que esta asignatura la necesita el ciudadano, el especialista, el empresario, el profesional, para la toma de decisiones basadas en los análisis estadísticos.

A nivel mundial existen entidades interesadas en la enseñanza de la estadística, entre las que se pueden enunciar: el Instituto Internacional de Estadística (ISI) y La Asociación Internacional para la Educación Estadística (IASE), las cuales han realizado varias conferencias internacionales basadas en la enseñanza de la estadística no sólo en la secundaria, sino también en la universidad, entre las que recientemente figuran “Formación de Profesores en el Uso de la Estadística” (Batanero, 2001), y “Desarrollo Curricular en Estadística” (Burril & Camden, 2006). En todas las conferencias se ha resaltado la necesidad y utilidad de la estadística en la vida diaria, motivando así al desarrollo del razonamiento estadístico en el educando.

Entre muchas sugerencias metodológicas para la enseñanza de la estadística se recomienda el trabajo con proyectos, mediante los cuales los estudiantes puedan contextualizar los conceptos aprendidos y entender la utilidad de la estadística para la resolución de problemas (Batanero & Díaz, 2004).

Según Batanero y Godino (2001), las siguientes consideraciones resaltan el interés por la comprensión de conceptos estadísticos tan esenciales como la media, la mediana y la moda, en la enseñanza de la estadística.

a) El aprendizaje de la estadística se logra mejor a partir del trabajo con proyectos o actividades de análisis exploratorio de datos que los alumnos recojan en la clase de estadística (dentro y fuera de ésta). Apoyando las

teorías de aprendizaje que resaltan el valor de la interacción social y del discurso en la construcción del conocimiento.

b) Es necesario contar con la cooperación de los organismos oficiales o sociedades de estadística y educadores, para facilitar el uso de datos estadísticos como recurso didáctico.

c) Se deben tener en cuenta simultáneamente los diferentes puntos de vista (local y global) en la enseñanza de la estadística, ya que se debe contar con las tendencias internacionales en la enseñanza, pero hay que adaptarlas a cada país.

En la educación secundaria (y en la universidad) se amplía la definición de la media, trabajándose primero con medias ponderadas y luego con medias de variables aleatorias discretas y continuas. Se enuncian y demuestran algunas propiedades de los promedios y se presentan aplicaciones a situaciones problemáticas más realistas y complejas.

A la hora de enseñar las medidas de centralización el docente debe tener en cuenta que éstas poseen ciertas propiedades que las caracterizan y facilitan el trabajo con ellas, propiedades que en ocasiones pueden coincidir para la media, la mediana y la moda, pero en otras no, lo cual puede causar problemas de comprensión o confusiones en los estudiantes. Estas propiedades permiten que las medidas de posición central puedan ser contempladas desde diversos puntos de vista: Como el resultado de un cálculo (el valor obtenido en el cálculo de la mediana), como operador que a una distribución asigna un número (el algoritmo u operación con los datos) y como un resumen estadístico o parámetro que caracteriza una distribución. Dichas propiedades son:

a. Propiedades Numéricas

a) La media, mediana y moda de un conjunto de datos son siempre valores pertenecientes al rango de la variable. Nunca se puede obtener un valor mayor que el máximo de los datos ni menor que el más pequeño.

b) Mientras la moda siempre coincide con uno de los valores dados, la media y mediana no tienen por qué coincidir con los valores de los datos, e incluso podría ser un número perteneciente a un conjunto numérico más amplio que el dado.

c) En el cálculo de la media se tienen en cuenta todos valores de los datos, pero no en la mediana y la moda.

Aunque desde un punto de vista puramente descriptivo, las tres medidas de centralización proporcionan información complementaria, sus propiedades son muy distintas: La media utiliza todos los datos y es, por tanto, preferible, si los datos son homogéneos. Por el contrario la mediana utiliza menos información que la media, ya que sólo tiene en cuenta el orden de los datos y no su magnitud.

d) El valor numérico de la media cambia cuando se cambia cualquier dato. Algunos cambios en los datos no cambian siempre el valor de la moda o mediana.

b. Propiedades Algebraicas

Son aquellas que se deducen al considerar la media, mediana o moda como una operación sobre el conjunto de datos.

a) Operación interna. Mientras que la moda puede considerarse una operación interna, ya que conserva el conjunto numérico del cual se han tomado los datos, el cálculo de la media y la mediana no es una operación interna en el conjunto numérico utilizado, puesto que ésta puede tomar un valor distinto a todos sus elementos. Es una formalización algebraica de la propiedad numérica 1.

b) La media, mediana y moda, consideradas como operaciones algebraicas, no tienen elemento neutro ni simétrico. Cualquier dato que se añada al conjunto hace variar el valor de la media. Esta propiedad no se encuentra expresamente en los libros, pero se puede considerar por ser señalada en las investigaciones sobre comprensión de los promedios.

c) Son operaciones conmutativas. El orden de aparición de los datos no afecta al valor de la media, mediana o moda.

d) Conservan los cambios de origen y escala. Si se suma, resta, multiplica o divide cada elemento del conjunto de datos por un mismo número, esta operación se traslada a la media, mediana y moda. Por tanto, éstas se expresan en las mismas unidades que los datos. Un ejemplo es el siguiente.

La edad media de un grupo de niños es 5,6 años. ¿Cuál será el tiempo medio si expresamos los datos en meses? ¿Cuál será la edad media de los niños dentro de 3 años? Batanero y Godino (2001).

e) La media de la suma de dos o más variables, es igual a la suma de las medias de dichas variables. Esta propiedad no se cumple en la mediana o moda.

La media aritmética de la suma de dos variables, X e Y, es igual a la suma de las medias aritméticas de cada una de las variables, y también, en general se cumple para cualquier número de variables (Batanero y Godino, 2001).

f) La moda puede no existir o, si existe, no ser única. La media y mediana siempre existen en datos numéricos. (Calot, 1988).

c. Propiedades Estadísticas

Son aquellas que se deducen cuando se considera el promedio como un resumen de los datos, es decir, respecto a la información que proporciona el conjunto de datos.

a) La media, mediana y moda son representantes de un colectivo, por lo que proporcionan información de todo el conjunto y no de elementos concretos. Esta propiedad aparece en todos los libros, bien en forma explícita o implícita.

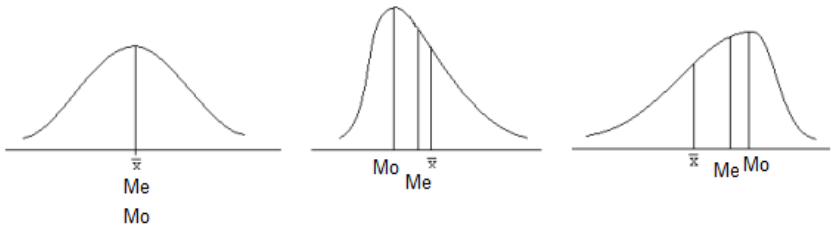
b) La media coincide con el centro del conjunto de datos, semejante al centro de gravedad. Si los datos representasen unidades de peso, colocadas sobre la recta numérica, la media sería el punto de equilibrio de la misma. Esto no se cumple con la mediana y la moda.

La media es el centro de los datos, en el sentido de equilibrar los valores por exceso y por defecto.

c) En distribuciones simétricas, la media coincide con la mediana y la moda (en distribuciones unimodales). En estas distribuciones, los datos se distribuyen uniformemente a lo largo del recorrido de forma que las medidas de centralización quedan situadas en el centro del mismo. Si la distribución es asimétrica a la derecha el orden en que aparecen es moda-mediana-media, y

si es asimétrica a la izquierda el orden es media-mediana-moda (para distribuciones unimodales). Si la distribución es asimétrica es preferible la mediana a la media como medida de tendencia central.

Los siguientes gráficos muestran esta propiedad.



d) La media es un estadístico poco resistente, muy sensible a la variación en los datos, especialmente a los valores atípicos. Esto la hace menos recomendable, en distribuciones en las que éstos aparecen, que otras medidas como la mediana. La mediana y la moda son estadísticos más resistentes. Como medida de tendencia central, la mediana presenta ciertas ventajas frente a la media en algunas distribuciones ya que no se ve afectada por valores extremos de las observaciones. La mediana es invariante si se disminuye una observación inferior a ella o si se aumenta una superior, puesto que sólo se tienen en cuenta los valores centrales de la variable. Por ello es adecuada para distribuciones asimétricas o cuando existen valores atípicos. (Batanero & Godino, 2001).

e) La suma de las desviaciones de un conjunto de datos de su media es cero. La suma de los valores absolutos de las desviaciones es mínima respecto a la mediana. La media aritmética es el centro de gravedad de la distribución de la variable, es decir, la suma de las desviaciones de los valores con respecto a ella es igual a cero.

f) Es respecto a la media, cuando la suma de los cuadrados de las desviaciones es mínima. Esta propiedad indica que el error que cometemos para cada uno de los valores de los datos, al substituirlo por su media queda anulado, en el sentido que los errores positivos se compensan con los negativos. (Johnson, 1992).

g) Para datos agrupados en intervalos con alguno de ellos abierto también es preferible la mediana a la media. Existe la moda, pero no la media. (Calot, 1988).

h) Existe moda(s) tanto para variables cuantitativas como cualitativas.

i) En distribuciones no unimodales, la mediana es mejor representante del conjunto de datos que la media. (Cobo, 2003).

CAPÍTULO 3

Metodología

Después de un estudio minucioso de varias metodologías existentes para el desarrollo de la investigación en el área de la educación, la metodología cualitativa “Investigación – Acción” es la más apropiada para el desarrollo de esta tesis, que pretende por medio del trabajo con los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Entrerríos mostrar de forma didáctica la enseñanza de las medidas de tendencia central (media, mediana y moda) y su interpretación

mediante la resolución de situaciones de la vida diaria dentro de su contexto prácticamente rural.

La Investigación – Acción es una forma de indagación introspectiva colectiva emprendida por participantes en situaciones sociales con objeto de mejorar la racionalidad de sus prácticas sociales o educativas, así como su comprensión de esas prácticas y de las situaciones en que éstas tienen lugar (Carr & Kemmis, 1988).

La práctica educativa es un objeto de estudio que se adapta muy bien a las características de la investigación cualitativa (Gollete & Lessard, 1998), ya que reúne ciertas condiciones: el investigador (docente y estudiante) permanece en el terreno, hace observación participante, elabora diarios de campo y registros de sus observaciones, interactúa con las personas y actúa en un contexto natural; en la construcción del objeto de estudio, el investigador categoriza la información y da sentido a los lugares, los momentos y las acciones en el proceso mismo de la investigación.

En la investigación cualitativa es necesario tener técnicas e instrumentos propios como: observación, análisis de documentos, entrevistas, cuestionarios, notas de campo, diario, grabaciones de audio o vídeo, fotografías, entre otros.

Esta metodología está orientada por las siguientes fases:

Fase I: Diagnóstico

Estudio del Problema

Así como se dijo anteriormente la estadística en muchos países y especialmente en Colombia ha sido dejada de lado por los docentes del bachillerato dentro del aula de clase, porque aunque en el plan de área existe, en cumplimiento de lo exigido por los estándares dados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), ésta queda relegada para lo último por si alcanza el tiempo para dictarla; de hecho la gran mayoría de los textos dejan a la estadística en los últimos capítulos, al igual que la geometría. Éste es el caso de muchas instituciones educativas, donde es muy poco el interés por parte de los docentes en enseñar la estadística, ya que la excusa es que "no alcanza el tiempo para tantos temas" y los pocos que la enseñan lo hacen a partir de los textos que existen con ejercicios o actividades salidas de la realidad que rodea a los estudiantes, y basada prácticamente en la realización de tablas, gráficas, y en la aplicación de algoritmos para hallar las medidas de tendencia central. Dicha aplicación se realiza simplemente de forma mecánica, sin darle importancia a su interpretación, de ahí que cuando los estudiantes no recuerdan los algoritmos, no son capaces de dar solución a las actividades indicadas; contrario sería si ellos analizaran en qué consisten cada una de las medidas (de manera conceptual) sin necesidad de memorizar fórmulas, de las cuales no saben argumentar lo que significa cada una de las variables que las conforman.

Carmen Batanero y su grupo de trabajo han sido quienes más se han interesado a nivel mundial por realizar investigaciones acerca de la comprensión de las medidas de tendencia central (Batanero, 2001) y han encontrado que los estudiantes trabajan con la aplicación de los algoritmos para el cálculo de éstas.

Además, han hallado que algunos errores y dificultades sobre las medidas de posición central se encuentran relacionados con el tratamiento de las representaciones estadísticas de los conjuntos de datos, en particular, cuando son en forma de gráficas (histogramas, diagramas circulares, entre otros) e igualmente, que dichos errores y dificultades se relacionan con las prácticas que los docentes de matemáticas ejecutan durante el tratamiento de los conceptos estadísticos derivados de la siguiente secuencia: definición, ejemplos y ejercicios. Para ello se basan en la predeterminación de los currículos escolares y los libros de texto, sin llevar a los estudiantes a que interpreten los datos para analizar la realidad de la vida diaria.

Fase II.

Elaboración y Estrategia de la Propuesta de solución

En las instituciones educativas es necesario enfatizar la construcción del conocimiento matemático por parte del estudiante, mediante situaciones didácticas en donde la acción, formulación, validación e institucionalización del conocimiento se lleve a cabo, tal como lo propone Brousseau (1999) en su teoría de situaciones didácticas mostrado antes en el marco teórico. En el caso de la educación estadística, se propone hacerlo con situaciones didácticas, problemas o proyectos sencillos, que generen en los estudiantes la capacidad de (i) tomar decisiones ante situaciones de incertidumbre, (ii) leer gráficos para comunicar información proveniente de diversos medios, (iii) construir y emplear gráficas, (iv) utilizar las medidas de posición central y su propiedad de representatividad, (v)

analizar la variación de los datos, (vi) realizar investigación de campo para la recolección de datos y (vii) predecir hechos o acontecimientos.

La recopilación de investigaciones realizadas por Batanero (2001) y Shaugnessy (1992), presenta a la comunidad de profesores de matemáticas y de estadística los diversos fenómenos didácticos que se suscitan en el aula cuando se realiza el tratamiento de conceptos estadísticos, desde los estudiantes de nivel básico hasta aquellos de nivel superior, incluso en el ámbito profesional.

Por lo tanto se espera que los docentes propicien en el aula de clases la participación activa de los estudiantes, mediante el análisis de situaciones didácticas, problemas o proyectos sencillos, en donde el cálculo de las medidas de posición central parta de la recolección, análisis e interpretación de los datos, es decir, obtener muestras estadísticas, analizar la variabilidad de éstos, identificar comportamientos con tendencias y patrones en su representación gráfica, analizar los efectos de la variabilidad de las muestras sobre los valores representativos de la media, la mediana y la moda, la predicción de hechos o sucesos y la toma de decisiones. Además éstas son acciones que favorecen que los estudiantes estén en contacto con los conceptos estadísticos y los puedan caracterizar.

Los docentes deben prestar la máxima atención a los resultados e interpretaciones que los estudiantes obtengan y expongan, para poder identificar cuáles son las dificultades y errores que ellos presentan.

También se sugiere que los docentes propongan situaciones a resolver a través de la tecnología, pues el manejo de la información con un software conlleva a realizar una mejor construcción y trabajo de los conceptos estadísticos, al

centrar la atención en el análisis e interpretación de los datos, y no en tediosos cálculos.

El tratamiento de los conceptos estadísticos en el aula, se ve favorecido por situaciones en contextos reales, donde la incertidumbre, la aleatoriedad, la toma de decisiones, se encuentren presentes, como necesidad de predecir y comunicar hechos y sucesos.

En las situaciones didácticas, se recomienda que los profesores tomen en cuenta las siguientes consideraciones para la construcción del conocimiento estadístico: Predicciones sobre fenómenos aleatorios. Contextualización de los problemas. Representación tabular y gráfica de un conjunto de datos. Análisis de la variación de datos. Construcción de algoritmos. Toma de decisiones. Investigación de campo. Dificultades y errores que los estudiantes presentan durante el tratamiento de los conceptos estadísticos.

Haciendo de esas situaciones didácticas unos proyectos sencillos se lograría que los estudiantes adquieran conocimientos estratégicos (saber cuándo hay que usar un concepto o gráfico dado) contribuyendo así a la competencia en comunicación lingüística, pues el alumno utiliza continuamente la expresión oral y escrita en la formulación y expresión de las ideas. Además, los proyectos contextualizan la estadística. Los datos tienen un significado y tienen que ser interpretados (Carmen Batanero en su artículo ¿Por qué y cómo enseñar Estadística?).

Según Batanero y Godino (2004), los proyectos están concebidos para introducir en la clase una filosofía exploratoria y participativa, en tendencias con las recomendaciones recientes sobre metodología de enseñanza de la

estadística. Lo deseable sería que los propios alumnos eligieran el tema en el que quieren trabajar y elaborasen sus propios proyectos en grupos de dos o tres alumnos.

De esta manera, se esperaría propiciar que los estudiantes generen argumentos para construir su conocimiento estadístico y aplicarlo ante cualquier situación de la vida cotidiana.

En las instituciones educativas, por tanto, se hace necesario culturizar estadísticamente a la población estudiantil, empleando la estadística como una herramienta de la vida diaria para la lectura, comunicación de información y toma de decisiones. Para esto sería ideal que la Estadística esté como una asignatura más del currículo y no que se trate sólo de un capítulo de matemáticas.

Fase III.

Aplicación de la Solución

La estrategia de solución anterior fue aplicada en la Institución Educativa Entrerríos (municipio de Entrerríos - Antioquia) en un grado octavo con 36 estudiantes, se procedió como se muestra a continuación.

Paso 1. Se realizó la siguiente prueba diagnóstica para observar qué tanto sabían los estudiantes a cerca de la estadística.

P1.El significado de Estadística más adecuado es:

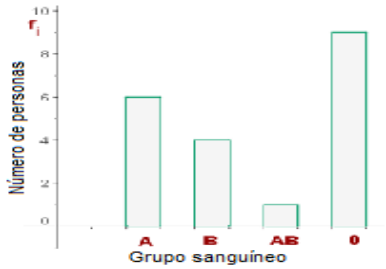
a. Un análisis matemático.

b. Una ciencia que estudia la recolección, análisis e interpretación de datos.

c. Un grupo de datos analizados con las matemáticas.

d. Conjunto de gráficas que muestran un análisis.

Responda las preguntas 2 y 3 según el gráfico



P2. La gráfica muestra los tipos de sangre de algunas personas Encuestadas. Sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera

a. El grupo sanguíneo más común es el AB

b. El grupo sanguíneo menos común es el B

c. El grupo sanguíneo O es más común que el A

d. Los grupos sanguíneos más comunes son el B y el AB

P3. Sólo una de las siguientes afirmaciones es falsa

a. De 10 personas 4 tienen sangre tipo B y 6 tipo A

b. La encuesta se le realizó a 30 personas

c. 9 personas tienen grupo sanguíneo O

d. Sólo una persona tiene grupo sanguíneo AB

P4. De acuerdo al gráfico

a. El tenis es el deporte que más se práctica

b. La natación tiene el porcentaje más pequeño

c. Los porcentajes más altos en prácticas son el baloncesto y el fútbol

d. La suma de los porcentajes de natación y tenis es mayor que la suma de baloncesto y fútbol.

Responda las preguntas 5 a 7 de acuerdo a la siguiente situación: Pregúntale a un grupo de 20 estudiantes de tu grupo cuál fue la nota obtenida en el área de matemáticas en el período anterior y determina lo pedido en cada punto.

P5. La nota promedio del grupo (media) en la asignatura de matemáticas es:

a. 3,0

b. 2,5

c. 3,25

d. 4,0

e. Ninguna de las anteriores

P6. La moda en el grupo de notas es:

a. 2,5

b. 3,0

c. 3,8

d. 4,0

e. Ninguna de las anteriores

P7. La mediana que se tiene es:

a. 4,0
b. 2,5
c. 3,1
d. 3,5
e. Ninguna de las anteriores

Según los resultados de la prueba diagnóstica, se pudo observar que la gran mayoría de los estudiantes desconocen el tema de la estadística, conclusión a la que se llega por cuanto alrededor del 75% de ellos, no dieron una respuesta que por lo menos se acercara a una definición del concepto estadística, tal como es posible definirla cuando se dice que es “una ciencia que estudia la recolección, análisis, e interpretación de datos”. Lo acabado de sostener, permite inferir que estos estudiantes no se les había enseñado la asignatura o simplemente no habían escuchado sobre ella.

En las preguntas dos, tres y cuatro correspondientes a la interpretación de gráficos sencillos, los estudiantes se acercaron más a la respuesta correcta, lo que evidencia que con gráficos claros el estudiante tiene más posibilidades de indagar y concluir cuando se le aborda para que haga referencia a un estudio.

En las preguntas cinco, seis y siete se mostró que las medidas de tendencia central están por fuera del pensum académico de la secundaria, ya que casi todos los estudiantes presentaron dificultad a la hora de dar la respuesta correcta a cada una de ellas, porque aunque algunos sabían acerca de la media desconocían por completo la mediana y la moda.

Paso 2. Por medio de situaciones didácticas se procedió a la explicación de los conceptos de población, muestra, variables, datos simples y datos agrupados,

tablas de frecuencias, gráficas, ya que antes no habían trabajado en estadística, todo esto para poder entrar en la explicación de las medidas de tendencia central que es lo que nos interesa en este trabajo.

Siguiendo a Cobo (2003), y Batanero y Godino (2001) algunos ejemplos que se tuvieron en cuenta con el objetivo de una mejor comprensión e interpretación de las medidas de tendencia central, se encuentran citados en los anexos en el capítulo cinco como campos de problemas asociados a la media, la mediana y la moda.

El desarrollo en las clases de las situaciones didácticas presentadas en cada uno de los campos de problemas antes mencionados se realizó así:

Para los campos de problemas asociados a la media

CME1. Se conformaron ocho grupos y cada grupo debía medir en una balanza un borrador (todos midieron el mismo borrador), obteniendo algunos resultados diferentes y otros iguales entre sí. Ellos debían obtener la mejor estimación del peso real del borrador; como era de esperarse los estudiantes sumaron los valores obtenidos y los dividieron por ocho, obteniendo el valor de la media.

Para el ejercicio de los paquetes de pastas, cada estudiante debía estimar el mejor valor en peso del paquete de pasta, este ejercicio se realizó con los datos brindados por el ejercicio original, como se había realizado el ejercicio anterior fue muy fácil para ellos sumar todos los resultados dados y dividirlos por el número de datos para obtener la mejor estimación posible del peso de un paquete de pasta de esa marca.

CME2. Los estudiantes formaron equipos y cada integrante del equipo debía llevar dulces y luego repartirlos entre todos los integrantes de forma equitativa. Para ello contaron todos los dulces juntos y los dividieron entre el número de los integrantes por partes iguales, en algunos grupos sobró uno o dos dulces y ellos los rifaban haciendo uso del azar.

CME3. Cada estudiante debía determinar la nota media del área de matemáticas, para esto la docente les dio las diferentes notas obtenidas en el período hasta el momento.

Con la ayuda del profesor de educación física en sus clases se realizó la toma de datos de la altura alcanzada por los estudiantes al saltar primero sin entrenamiento y después de haber entrenado, los estudiantes compararon los valores medios de los datos sin entrenamiento y con entrenamiento para poder determinar si el entrenamiento era efectivo o no.

CME4. Los estudiantes formaron equipos de cinco integrantes, se midieron entre ellos para determinar la estatura promedio del grupo de los cinco, al final se analizaron las medidas obtenidas de cada grupo para determinar la estatura promedio de todo el grupo de octavo haciendo uso de la media.

CME5. El salón se dividió en dos grupos, se le realizaron 10 preguntas y cada integrante del equipo debía contestarla, al final se contabilizó cuántas preguntas buenas tenía cada integrante del equipo, se sumaron los resultados y se

dividieron por el número de estos. Cada equipo realizó lo mismo y se determinó cual ganó según la media mayor obtenida.

Para los campos asociados a la mediana

CMED1. Con los datos originales del problema se realizó un gráfico y se explicó la asimetría existente entre ellos, por lo tanto se mostró que la media no es la medida que da el valor central representativo, sino que se debe tomar el valor de la mediana.

CMED2. Con éste se quiso mostrar a los estudiantes que las variables ordinales se deben analizar con la mediana porque cuando se estudian variables cualitativas ordinales, las diferencias del valor numérico de la variable no corresponden a diferencias de la magnitud medida y la mediana puede representar los datos más coherentemente que la media.

Para los campos asociados a la moda

CMO1. En este ejercicio se le preguntó a cada estudiante del curso la edad cumplida para determinar la edad predominante en el grupo, mediante una tabla de frecuencias se determinó cual era el valor dominante y así concluir cual era la moda.

CMO2. Este problema los estudiantes lo resolvieron teniendo en cuenta los datos originales para demostrar que cuando se tienen datos cualitativos la medida

de tendencia central más representativa en dicha solución es la moda, ya que la media y la mediana no están definidas para datos cualitativos.

Mediante las situaciones didácticas se pudo observar que los estudiantes disfrutaron mucho más de la clase de estadística, pues hubo un crecimiento en la participación en clase y a pesar de las diferentes dificultades presentes a la hora de abordar un ejercicio siempre se trabajó hasta lo último para sacar adelante la situación problema.

Algunos errores que se cometieron fueron los mismos que expone Carvalho (1998) como lo son: para la moda el tomar la mayor frecuencia absoluta; para la mediana no ordenar los datos para calcularla; calcular el dato central de las frecuencias absolutas ordenadas de forma creciente; calcular la moda en vez de la mediana; equivocarse al calcular el valor central; para la media hallar la media de los valores de las frecuencias; no tener en cuenta la frecuencia absoluta de cada valor en el cálculo de esta.

Se puede decir que el cálculo de la mediana se hace complejo, porque el algoritmo de cálculo es diferente, si se tiene un número par o impar de datos, y según los datos se presenten en tablas de valores agrupados o sin agrupar y también el valor obtenido es diferente, según se aplique uno u otro algoritmo. Esto puede resultar difícil para los estudiantes que están acostumbrados a un único método de cálculo y una única solución para los problemas matemáticos.

Paso 3. Retomando la teoría de Brousseau (1999) en las situaciones a-didácticas y el ciclo investigador de Wild y Pfannkuch (1999) mostrado antes en el marco teórico, los estudiantes formaron equipos de tres y cuatro integrantes, cada

estudiante del grupo conformado planteó una pregunta que tenía que ver con el contexto del municipio de Entrerrríos, por ejemplo, ¿cuál era la producción de leche en una semana en una finca?, ¿Cuántos tomates de árbol da un palo en promedio en una cosecha de éste?, entre otras. Entre el grupo debían decidir cuál sería su objeto de estudio (situación problema). Cada integrante del grupo participó del proceso de solución del problema, teniendo siempre la interacción entre ellos y el medio didáctico, que para este caso el medio didáctico eran los diferentes cultivos como: tomate de árbol, tomate de aliño, aguacate, fresa, maíz, papa y la producción de leche que es lo que más se produce, junto con el tomate de árbol en esta región del norte de Antioquia. Y la interacción entre ellos se dio en los momentos en que ellos recogían los datos, los clasificaban y los analizaban, y por último cuando sacaron las conclusiones pertinentes de acuerdo a la interpretación de los resultados del análisis hecho y el surgimiento de nuevas ideas con respecto al tema en cuestión.

Del trabajo en equipo resultaron trabajos excelentes acerca de su entorno rural en la gran mayoría. A continuación se presentan tres de los trabajos entregados.

Análisis estadístico 1: Producción de tomate de árbol

Problema

El tomate de árbol es uno de los productos típicos de nuestro municipio, su cosecha es elevada y de gran valor; además de ser una de las plantaciones más extensas y de mayor consumo en esta región del norte de Antioquia.

El clima de nuestro municipio es de los más propicios para cultivar uno de los mejores tomates de árbol del país. También una de las mayores empresas de tomate de árbol se encuentran en nuestro municipio: “Luna Roja”.

Dos de las tomateras más grandes de esta región son del señor Antonio Lopera. Estas tomateras son: “La Guaira” y “La Muñoz”.

“La Muñoz” ubicada en la vereda La Muñoz es la que escogimos para realizar la práctica. Se quiere saber ¿Cuántos tomates en promedio produce un árbol?.

Toma de datos, análisis y resultados

1. Toma de datos.

La finca “La Muñoz”, es una tomatera de 10.000 m^2, la cual tiene 8.100 palos de tomate. De esos 8.100, tomamos 100, los marcamos y escogimos al azar 30 de esos 100 palos y contamos la cantidad de tomates de cada palo. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Población: 100 árboles.

Muestra: 30 árboles.

29 30 30 31 32 33 35 36 36 39 39 40 40 40 40 41 42 45 46 46 47 47 48 48 48 49 49 50 50 51

Para ver la información resumida más apropiadamente se trabajó con datos agrupados.

Como los datos son 30, el número de intervalos son $\sqrt{30} = 5{,}4777 \cong 5$ y el tamaño de cada intervalo es $\frac{51-29}{5} = 4{,}4 \cong 4$.

Cantidad de tomates por árbol	f	f_r	%	F	X	f_x
29 – 33	6	$^{6}/_{30}$	20	6	31	186
34 – 38	3	$^{3}/_{30}$	10	9	36	108
39 – 43	8	$^{8}/_{30}$	26,7	17	41	328
44 – 48	8	$^{8}/_{30}$	26,7	45	46	368
49 – 53	5	$^{5}/_{30}$	16,6	30	51	255
TOTAL	30	1	100			1245

Tabla 1. Tabla de frecuencias cantidad de tomates por árbol.

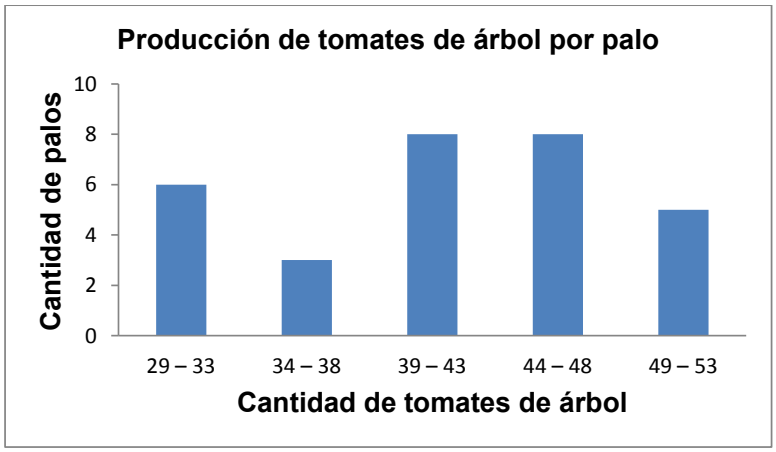


Figura 1. Gráfico de barras de la producción de tomates por palo.

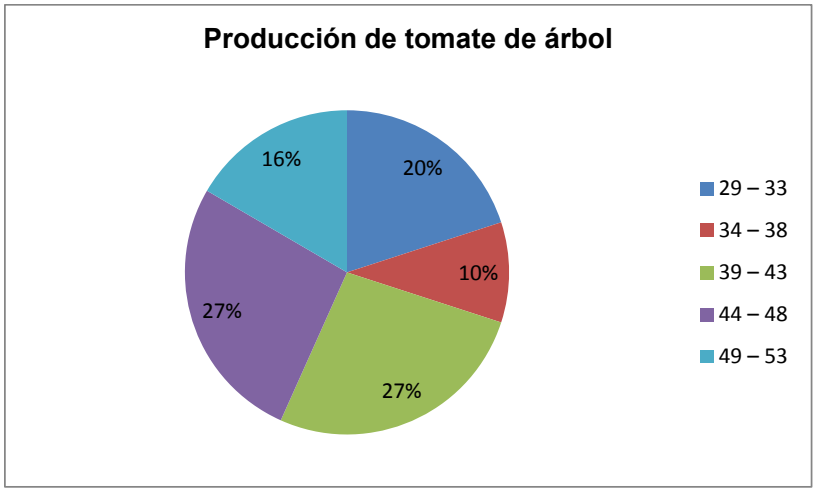


Figura 2. Gráfico circular de la producción de tomates

Medidas de centralización:

Las medidas de centralización se muestran en la tabla 2.

Moda (Mo)	43
Mediana (Me)	42
Media ($\bar{X}$)	41,5

Tabla 2. Medidas de centralización producción de tomate de árbol.

2. Análisis y Resultados

a) La mayor producción de tomate de árbol por palo está entre 39 y 48 tomates.

b) La menor producción de tomate de árbol se da entre 34 y 38 tomates.

c) Según la moda, 43 tomates es la cantidad producida que más se repite, aunque entre 30 palos analizados, ninguno produjo esta cantidad, lo que no es muy representativo.

d) Se puede decir que en promedio un palo produce entre 41 y 43 tomates de árbol.

e) El 53,4% de la producción la representa la cantidad de tomates de árbol por palo que está entre 39 y 48 tomates.

Conclusiones

a) Realizamos satisfactoriamente un trabajo exhaustivo sobre la práctica de un proceso estadístico, tomando como ejemplo la producción de tomate de árbol.

b) En la finca la Muñoz se puede concluir que en promedio un palo produce entre 41 y 43 tomates de árbol.

c) Mediante el análisis de las tablas de frecuencias y los gráficos se pudo indagar a cerca de las medidas de tendencia central.

Evaluación

Estudiante 1: fue una experiencia muy chévere, ya que gracias a este proyecto pudimos darnos cuenta de cómo uno de los cultivos más buenos y productores de tomate de árbol en nuestro municipio nos ayuda a entender un proceso estadístico, además gracias a esta práctica comprendí mejor la realización de los gráficos.

Estudiante2: la realización de este trabajo me ayudó a entender un proceso estadístico sencillo, fue más fácil para mí ya que fue algo práctico y real. La experiencia fue algo mucho más divertida que si lo hubiéramos hecho sólo en clase.

Estudiante 3: Este trabajo me ayudó a comprender mejor la estadística, ya que al principio no comprendía mucho los temas. Este proyecto fue algo muy chévere por lo práctico, además pude comprender que la estadística está inmersa en la vida diaria, y además con la ayuda de la informática realizar estos tipos de trabajo es mucho más fácil que realizarlos manualmente.

Evidencias

Figura 3. Fotos que evidencian el trabajo de la producción de tomates de árbol.

Análisis estadístico 2: Producción lechera

Problema

A partir del estudio de estadística se pretendió realizar un trabajo el cual demuestre la aplicabilidad de la estadística en la vida diaria, para este fin se observaron diversas actividades en las cuales se pueda emplear este estudio, se llegó a la conclusión, que la estadística tiene un amplio campo de acción, lo cual puede ser utilizada en cualquier situación de la vida cotidiana en la cual se lleve una secuencia organizada de datos.

Se eligió el estudio de una finca ganadera, que corresponde al seguimiento de la producción lechera en una semana en la finca la “Calavera” del municipio de Entrerríos, ubicada en la vereda las Brisas que se encuentra a una distancia de 14 kilómetros de la cabecera municipal. La producción de leche es el producto que genera movimiento económico, social y cultural en el Municipio de Entrerríos, pero la producción de leche en la finca la Calavera es discontinua y genera una inestabilidad notable, por tal razón se decide realizar un seguimiento a esta situación.

Para este trabajo la población está representada en todas las vacas que tiene la finca ganadera La Calavera que son 20 y la muestra son 10 elegidas al azar para analizar la cantidad de litros producidos durante cinco días. Los registros de leche se tomarán en la mañana y en la tarde.

La siguiente tabla muestra la toma de datos de la producción de leche de las diez vacas durante los cinco días.

Producción / Nombre	Jueves		Viernes		Sábado		Domingo		Lunes		
	am	pm	am	pm	am	pm	am	pm	am	pm	Total litros de cada vaca
Coroza	12	10	13	12	12	10	12	10	13	11	115
Tigra	7	6	8	7	9	8	6	7	8	7	73
Lucera	14	12	13	12	14	12	14	12	14	13	130
Muñeca	10	8	10	9	10	9	9	8	10	8	91
Zorra	8	7	9	8	9	7	8	7	9	8	80
Niña	14	12	15	13	13	12	13	13	13	12	130
Natalia	11	10	12	11	12	10	11	10	11	9	107
Rosita	13	12	14	11	13	11	12	12	13	12	123
Matea	10	9	11	8	11	10	11	9	10	9	98
Mariposa	13	11	13	11	12	11	11	11	12	11	116
Total jornada	112	97	118	102	115	100	107	99	113	100	1063
Total día	209		220		215		206		213		1063

Tabla 3. Registro de producción de leche por diez vacas en cinco días

vaca	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	porcentaje
coroza	115	115/1063	10.8%
Tigra	73	73/1063	6.8%
lucera	130	130/1063	12.2%
Muñeca	91	91/1063	8.5%
zorra	80	80/1063	7.5%
Niña	130	130/1063	12.2%
Natalia	107	107/1063	10%
Rosita	123	123/1063	11.5%
Matea	98	98/1063	9.2%
mariposa	116	116/1063	10.9%
total	1063	1	100%

Tabla 4. Tabla de frecuencias de producción de litros de leche en los cinco días.

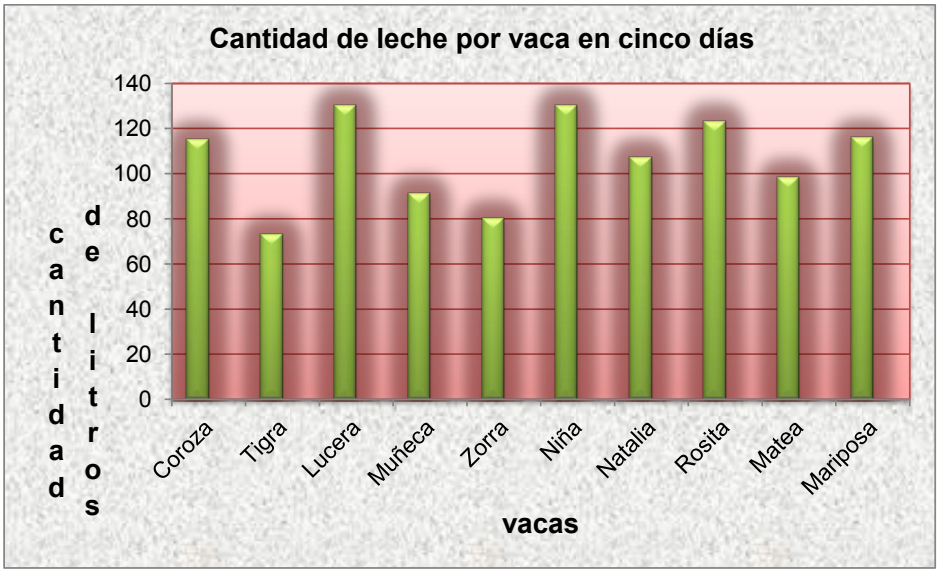


Figura 4. Gráfico de barras cantidad de leche producida en cinco días.

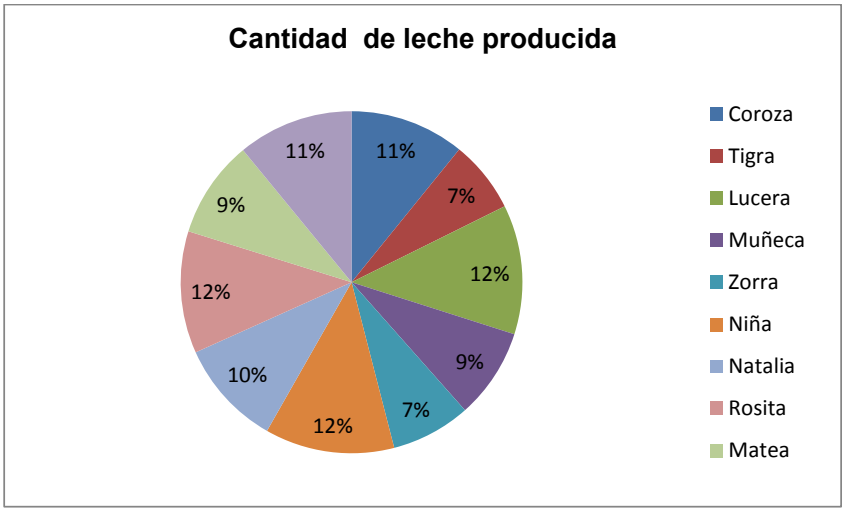


Figura 5. Diagrama circular cantidad de leche producida en cinco días.

Medidas de centralización

Moda: 130 litros en los cinco días según el gráfico de barras, y según la tabla de datos es 12 litros analizados diariamente durante los dos ordeños.

Mediana: es 11 litros

Media: es 10,63 litros

Análisis e interpretación

a. Las vacas consideradas en el estudio dieron más leche el día viernes que los demás días.

b. Con base en los resultados obtenidos de las 10 vacas se observa que todos los días las vacas dan más leche en la mañana que en la tarde.

c. La niña y la lucera fueron las vacas que más leche dieron durante los cinco días.

d. La tigra es la vaca que menos leche dio en los cinco días.

e. La mariposa, la Niña y Rosita fueron las únicas vacas que dieron la misma cantidad de leche en la mañana y en la tarde al menos en un solo día (Domingo).

f. La Mariposa fue la única vaca que produjo la misma cantidad de leche en la tarde todos los cinco días.

g. Las vacas la Tigra, Muñeca, Zorra y Matea no superaron los 100 litros de leche en la producción.

h. Se puede decir que en promedio una vaca de la finca La Calavera produce 10,63 litros de leche en un ordeño y 10 vacas producen en promedio 212,6 litros de leche en un día.

i. Durante los cinco días se tuvo una producción de 1063 litros de leche.

Conclusiones

Con este trabajo estadístico se logró verificar la producción de leche de las vacas en la finca La Calavera, su promedio de litros diarios está entre 206 y 220 litros, y el promedio en cada vaca por ordeño está entre 10 y 12 litros.

De acuerdo a los gráficos es difícil sacar las medidas de tendencia central, sólo la moda es la más fácil de determinar con mirar las barras.

En la época actual la leche es el producto del cual dependen la mayoría de las familias entrerrianas, sin embargo, su producción acarrea grandes costos representados en el concentrado, agro-químicos, infraestructura y drogas. Por tal razón se requiere organización y sistematización continua de datos para de esta manera verificar su rentabilidad.

Cabe aclarar que la producción de leche depende de varios factores como: la raza de los bovinos, la hora del ordeño, el momento del ordeño, es decir si la vaca acaba de parir o no, la calidad del pasto y los diferentes nutrientes que tiene éste, entre otros.

Evaluación

Estudiante 1: Con este trabajo sobre la producción de la leche pude aprender de la estadística, me pareció muy chévere porque fue dinámica, y esta vez no fue teóricamente como siempre se ha hecho.

Estudiante 2: Mi opinión sobre este trabajo estadístico es que estuvo interesante, pues de forma práctica pude aprender de la estadística.

Estudiante 3: Este trabajo me gustó porque aprendí de la estadística de una manera agradable porque fue algo real, además me di cuenta que la estadística se puede aplicar en la vida cotidiana.

Evidencias

Figura 6. Fotos que evidencian el trabajo de la producción lechera en cinco días

Análisis estadístico 3: Producción de fresas

Problema.

En la finca ‘’los Sauces’’ localizada en la vereda el Zancudo del municipio de Entrerrios sus propietarios se encuentran cosechando fresas, se decide analizar este particular cultivo por ser el único conocido por nosotros en todo el municipio. Se desea saber cuántos frutos proporciona cada fresal, de 103 fresales que allí se encuentran se analizan 33 encontrándose la siguiente producción de fresas por planta.

3 4 4 5 5 5 5 6 6 6 6 7 7 7 7 7 8 8 8 9 9 9 9 10 10 11 11 11 11 12 13 13 15

Por ser 33 datos se decide analizarlos por intervalos, luego el número de intervalos es $\sqrt{33} = 5{,}7445 \cong 6$ y el tamaño del intervalo es $\frac{15-3}{6} = 2$.

Cantidad de fresas por planta	f	f_r	%	F	X	f_x
3 – 5	7	$^{7}/_{33}$	21,21	7	4	28
6 – 8	12	$^{12}/_{33}$	36,36	19	7	84
9 – 11	10	$^{10}/_{33}$	30,30	29	10	100
12 – 14	3	$^{3}/_{33}$	9,09	32	13	39
15 – 17	1	$^{1}/_{33}$	3,04	33	16	16
18 - 20	0	$^{0}/_{33}$	0	33	19	0
TOTAL	33		100			267

Tabla 5. Tabla de frecuencias de la cantidad de fresas por planta.

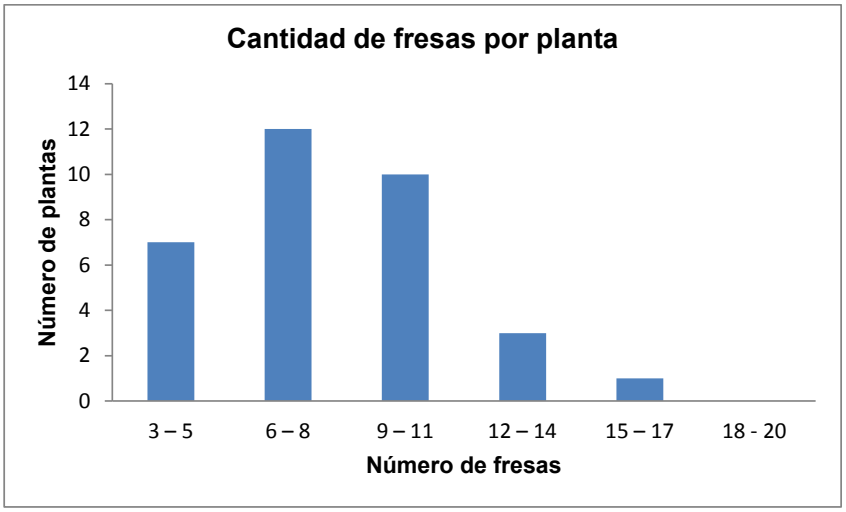


Figura 7. Diagrama de barras de la cantidad de fresas por planta.

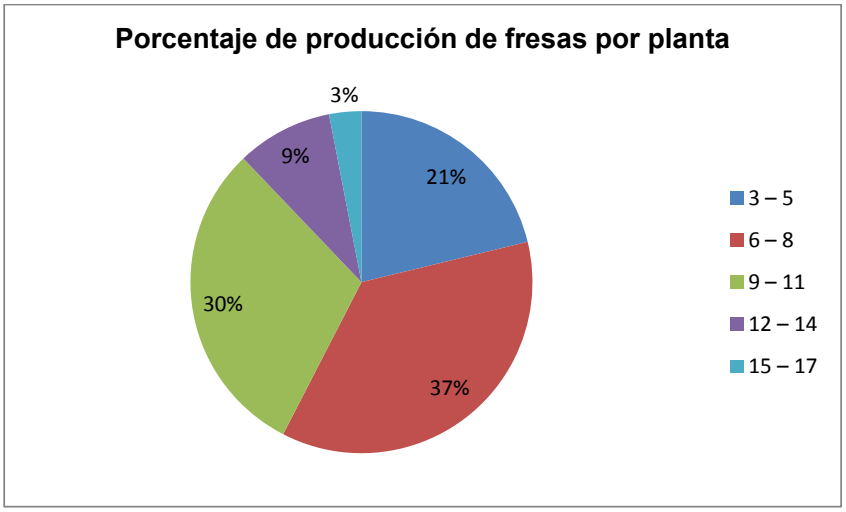


Figura 8. Diagrama circular del porcentaje de fresas por planta.

Las medidas de centralización se muestran en la tabla 6.

Moda (Mo)	7,43
Mediana (Me)	7,58
Media ($\bar{X}$)	8,09

Tabla 6. Medidas de centralización de producción de fresas.

Análisis y Resultados

a) El diagrama de barras permite ver que existe una asimetría a la izquierda lo que ubica a las medidas de tendencia central en el orden de moda, mediana y media, y así lo asevera los cálculos realizados para dichas medidas.

b) La mayor producción de fresas está entre 6 y 8 fresas por planta.

c) La menor producción de fresas está entre 3 y 5 fresas por planta.

d) Según la moda, 7,43 es la cantidad de fresa producida que más se repite, y esto es cierto porque de los datos analizados la planta que más fresas produjo fue 7 fresas.

e) Se puede decir que en promedio una planta produce entre 7 y 8 fresas.

f) La producción que representa la mayor cantidad se encuentra en el 37% y está dado entre 6 y 8 fresas por planta.

Conclusiones

a) mediante el proceso estadístico los dueños del cultivo de fresas quedaron satisfechos con el análisis realizado al cultivo, porque ellos obtuvieron datos concretos para calcular ganancias o pérdidas de cada cosecha.

b) Los propietarios de la finca “Los Sauces” pudieron identificar que en su cultivo de fresas, una planta puede producir entre 7 y 8 fresas en promedio.

c) Mediante la interpretación de los gráficos se pudo analizar las medidas de tendencia central.

d) Trabajar con datos agrupados permitió ver con más claridad el análisis estadístico del cultivo de fresas de la finca “Los Sauces”.

Evaluación

Estudiante 1: En este trabajo se evidencia como por medio de la interpretación de gráficos y tablas se realiza un completo análisis estadístico, el cual permite llegar a conclusiones efectivas para tomar decisiones en el cultivo de fresas.
Personalmente me encantó realizar un trabajo real, en donde tuve que desplazarme hasta la finca y obtener yo misma los datos necesarios para el análisis estadístico.

Estudiante 2: En primer lugar opino que el trabajo estuvo excelente para reforzar nuestros conocimientos haciendo análisis estadísticos a cultivos de la región donde vivo. Por otro lado aportamos a los dueños del cultivo de fresas una ayuda para que analicen las cosechas y puedan sacar beneficios de ella. También pude comprender muchas características del campo en cuanto a la siembra, y además fue una experiencia grande tener la responsabilidad de realizar cuentas y analizar datos para concluir acerca de la cosecha de fresas. Por último me parece muy bueno resolver problemas de la vida real.

Estudiante 3: En primer lugar le doy un valor muy alto a este trabajo porque por medio de él se pudo aprender acerca de las gráficas, tablas y medidas de tendencia central, aplicando lo visto en clase. Además me parece un trabajo muy práctico e interesante porque permite la interacción con el medio donde vivimos y nunca había realizado un análisis de la vida real, con datos reales.

Evidencias

Para evidenciar el análisis realizado se fueron tomadas las siguientes fotografías.

Figura 9. Fotos que evidencian la producción de fresas en la finca “Los Sauces” del municipio de Entrerríos (Ant.).

CAPÍTULO 4

Conclusiones

El aprendizaje de las medidas de centralización resulta difícil para los estudiantes, porque aunque las respectivas definiciones de media, mediana y moda son diferentes, para dar solución a algunas situaciones problemas se pueden utilizar las tres, o en otros casos sólo es conveniente utilizar una de las tres, es decir una de ellas es la que da la respuesta más apropiada y necesaria para el estudio que se esté realizando. La dificultad está en saber determinar cuál es la que mejor solución el problema en cuestión.

En la actualidad se puede decir que son pocos los estudiantes que se interesan por la estadística, para muchos de ellos es una materia aburrida. El trabajo de los docentes, debe ir dirigido a despertar en los estudiantes un interés genuino por dicha asignatura como instrumento de investigación y como herramienta para la solución de situaciones didácticas. En algunos países como Estados Unidos e Inglaterra es ya tradicional celebrar en las instituciones educativas (escuelas) competencias de proyectos estadísticos, experiencia valiosa que sería importante emular en nuestro país, por lo que los docentes deberían mostrar un alto grado de interés por la enseñanza de la estadística, y lograr que ésta no sea un capítulo más de las matemáticas, sino una asignatura que haga parte del pensum académico.

Dada la importancia que tienen los gráficos en la estadística, los docentes deben considerar la enseñanza de estos de una forma más detallada, porque con este trabajo se pudo demostrar la dificultad de los estudiantes al momento de leer o interpretar los distintos gráficos. Además se debe considerar el uso del software existente para el análisis de las medidas de centralización.

Mediante el trabajo con las situaciones didácticas reales tomadas en el contexto del municipio de Entrerríos (Antioquia), los estudiantes disfrutaron más de la enseñanza – aprendizaje de las medidas de centralización, pues en la evaluación de los diferentes trabajos que ellos desarrollaron se logró percibir dicha conducta, hecho atribuible a la constante interacción con el medio que los rodea, porque aunque se encuentran inmersos en él no habían realizado tareas que los obligaran a analizar los diferentes problemas que pueden tener los productos que generan la riqueza a dicho municipio.

Al finalizar no se repitió una prueba similar a la prueba diagnóstica ya que para determinar si realmente hubo un progreso en el entendimiento de los gráficos y el cálculo e interpretación de las medidas de centralización se realizaron los diferentes trabajos de las situaciones didácticas reales, las cuales cada estudiante debía sustentar para ser evaluado, dando un resultado satisfactorio porque alrededor del 80% de los estudiantes del grado octavo lograron entender y interpretar básicamente las medidas de centralización.

De las medidas de centralizaciñon se derivan otras medidas como son la varianza y la desviación estándar. Estas medidas no se abordaron en este trabajo, por cuanto sería muy pretencioso tratar de abarcar dicho tema en el desarrollo de este estudio, cuyo fin consistía en establecer un abrebocas para el

abordaje de la estadística como objeto de estudio para los estudiantes del grado octavo. De tal manera que lo estudiado hasta ahora sirve como fundamento para un estudio posterior que implique el desarrollo de los conceptos contenidos en las medidas de varianza y de desviación estándar. Queda abierta la posibilidad de estudiar estas medidas haciendo uso de las situaciones didácticas en otro nivel de enseñanza.

CAPÍTULO 5

Anexo 1

Campos de problemas asociados a la media

CME1. Estimar una medida a partir de diversas mediciones realizadas, en presencia de errores, por ejemplo:

- Conformar equipos de trabajo de máximo tres o cuatro estudiantes y pesar un objeto pequeño con un mismo instrumento y tabular los valores de todo el grupo en Las mismas unidades de medida (gramos). ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?
- Se han escogido 50 bolsas de pasta alimenticia en un supermercado. Todas ellas llevan impreso "Peso neto: 250 g" en la etiqueta. Después de pesarlas con precisión, se han obtenido los siguientes resultados, expresados en gramos.

243 269 226 249 255 240 266 230 236 250

252 261 242 240 270 240 251 228 259 262

260 231 261 268 252 259 250 249 243 256

230 250 252 259 236 249 243 256 230 250

249 243 256 230 250 252 274 268 270 233

¿Qué peso podemos esperar que tenga una bolsa de pasta alimenticia de esta marca?, (Matemáticas 3º ESO. Guadiel, Grupo Edebé, pg. 150).

Este es el campo de problemas del que originariamente surge la idea de media.

Si se plantean problemas como estos a los estudiantes de secundaria, en el primero, por ejemplo, la mayoría sumará los valores y dividirá por ocho para obtener el valor 6,2. Es fácil imaginar otros problemas que tienen esta misma solución como el segundo ejemplo mostrado. En muchas situaciones necesitamos medir una cantidad X desconocida de una cierta magnitud. Pero debido a la imperfección de nuestros instrumentos, en mediciones sucesivas obtenemos distintos números como medidas de X. No tenemos ninguna razón para pensar que el verdadero valor esté más cercano a uno u otro de los datos obtenidos. El problema consiste en determinar, a partir de un conjunto de medidas $x_1, x_2, \dots, x_n$ la mejor estimación posible del verdadero valor X desconocido. Según Plackett (1970), los astrónomos de Babilonia plantearon este problema, que fue resuelto en la Edad Media por Tycho Brae calculando la suma total de las observaciones y dividiendo por el número de datos. Esta práctica se ha conservado hasta nuestros días, dando origen a lo que hoy conocemos por media aritmética.

CME2. Obtener una cantidad equitativa al hacer un reparto para conseguir una distribución uniforme, por ejemplo,

Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?.

En esta situación y otras similares se necesita obtener una cantidad equitativa a repartir para conseguir una distribución uniforme, y como en el ejemplo, se toma la media aritmética. Este tipo de problemas surge con frecuencia al obtener la "renta per cápita", la velocidad media durante un viaje o la calificación final en un examen compuesto de varios exámenes parciales.

CME3. Obtener un elemento representativo de un conjunto de valores dados cuya distribución es aproximadamente simétrica, por ejemplo,

a) Un estudiante ha obtenido en cinco exámenes las siguientes calificaciones: 5,0 – 3,7 – 2,6 – 4,0 – 3,7 y 4,9. ¿Cuál es la nota media del estudiante? (Fractal 3. Matemáticas. Vicens Vives, pg. 260).

b) Al medir la altura, en cm., que pueden saltar un grupo de estudiantes antes y después de haber efectuado un cierto entrenamiento deportivo, se obtuvieron los valores siguientes.

Alumno	Andrés	Ana	Berta	Carla	Diana	Fanny	Hilda	Inés	Claudia	Juana
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

¿Piensas que el entrenamiento es efectivo?

Estos problemas muestran otra aplicación típica de la media, que consiste en servir de elemento representativo de un conjunto de valores dados xi, cuya distribución es aproximadamente simétrica. En el segundo ejemplo se usaría la altura media saltada antes y después del entrenamiento para ver si éste ha producido algún efecto.

Para representar un conjunto de datos se toma la media por sus propiedades de localización central, por ser "centro de gravedad" del espacio de valores muestrales o poblacionales. Si la distribución es muy asimétrica, el valor más frecuente (moda) o el valor central en el conjunto de datos ordenados (mediana) podrían ser más representativos. Vemos que cuando añadimos condiciones a un campo de problemas surgen conceptos relacionados con el de interés, con el cual guardan diferencias y semejanzas que son necesario investigar. De los primitivos problemas extra matemáticos, pasamos posteriormente a problemas internos a la misma matemática, como estudiar las diferentes propiedades de las medidas de posición central.

CME4. Conocer el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población para una variable con distribución aproximadamente simétrica, por ejemplo:

La altura media de los alumnos de un colegio es 1,40 cm. Si extraemos una muestra aleatoria de 5 estudiantes y resulta que la altura de los 4 primeros es de 1,38cm, 1,42cm, 1,60cm y 1,40cm. ¿Cuál sería la altura más probable del quinto estudiante?

En otras ocasiones se necesita conocer el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población. Por ejemplo, la predecir la esperanza de vida o el beneficio esperado en una inversión en bolsa, se toma la media de la variable en la población como predicción, como valor esperado, por sus propiedades muestrales derivadas del teorema central del límite. Del concepto de valor esperado se derivan muchos modelos de predicción, como los distintos tipos de regresión. Así, cuando predecimos el peso de una persona en función de su altura, usamos el peso promedio de todas las personas que en la población tienen la altura dada. En este caso, el valor buscado será la media en distribuciones simétricas, pero en distribuciones asimétricas o bimodales, la moda o la mediana podrían sustituirla.

Estos problemas y otros más, primero prácticos y más tarde teóricos, han llevado a la definición del concepto de media, a la identificación de sus propiedades, más tarde a la definición de otras medidas de posición central, como la mediana o moda, que son preferibles a la media en algunas situaciones concretas.

Además, ha sido necesario "probar" o "demostrar" la validez de estas soluciones y propiedades, para aceptarlas como parte del conocimiento matemático. Otros posibles problemas asociados a la media son: hallar la “razón que mide la contribución relativa de un grupo respecto a cada elemento” o la “señal en un proceso aleatorio –frente al ruido o variabilidad”.

CME5. Comparación de dos distribuciones de datos con variables numéricas. Por ejemplo,

En una escuela secundaria se celebró el concurso sobre resolución de problemas entre los grupos 8ª y 8B. El examen contenía 10 problemas. Si los resultados son los que se dan abajo. ¿Qué grupo ganó?.

Grupo 8A	Grupo8B
2 3 3 4 4 4 4 5 5 5	0 3 4 4 4 5 6 6 6 6
5 5 6 6 6 6 7 7 7 7	6 6 6 7 7 7 7 7 7 8
7 8 8 8 8 8 8 8 9 9	8 8 8 8 8 8 9 9 9 9
9 9 9 9 9 10 10 10 10 10	10 10 10 10 10

El ejemplo muestra dos conjuntos de datos, donde el estudiante debe elegir la medida de tendencia central adecuada, que en este caso, corresponde a la media aritmética, para poder compararlos. (Almaguer, 2000, p. 353).

Anexo 2

Campos de problemas asociados a la mediana

CMED1. Encontrar un resumen estadístico de posición central, en situaciones en las que la media no es suficientemente representativa. Por ejemplo:

La selección de estudiantes mediante un examen de admisión, en una escuela en la que se recibieron 50 solicitudes, pero el cupo es sólo para 25. Si los puntos obtenidos en el examen de admisión fueron:

46 46 47 49 49 50 52 55 55 58

58 58 58 59 60 60 62 63 65 66

66 66 67 68 70 72 73 75 75 75

78 78 78 80 83 84 95 96 96 96

98 99 100 103 105 110 112 114 115 120

Los alumnos aceptados son los que obtuvieron más de 71 puntos, porque la mediana es 71. ($M_e = \frac{70+72}{2} = 71$ y $\bar{x} = \frac{3763}{50} = 75{,}26$).

En este ejercicio lo apropiado es utilizar la mediana, ya que el uso de la media aritmética no sería representativa, pues se vería afectada por la dispersión de los datos. Por otra parte, también se observa que dicha distribución de datos es par, por lo que se tiene que añadir otro cálculo para llegar al resultado final (Almaguer 2000, p. 357).

Cuando la variable es muy asimétrica, tiene valores atípicos o presenta varias modas, el valor medio de una colección de datos no aporta información suficiente, por lo que interesa dividir el conjunto en dos, con el mismo número de efectivos, buscando un valor central. Ejemplos típicos de este tipo de variables son la renta per cápita, salario y otras variables económicas.

En una distribución asimétrica la media está muy alejada del centro y se sitúa en la cola de la distribución. Por ejemplo, la distribución de precios de las viviendas está muy sesgada hacia la derecha. Los informes sobre los precios de las viviendas, salarios y otras distribuciones fuertemente sesgadas dan la mediana como valor típico en lugar de la media (Moore, 1995, pg. 40).

CMED2. Encontrar un resumen estadístico de posición central para variables ordinales. Por ejemplo,

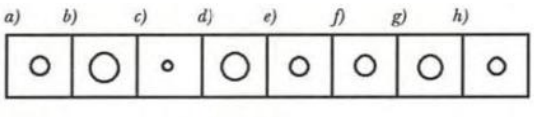
a) Un profesor califica a sus alumnos del siguiente modo: I=Insuficiente, A=Aprobado, N=Notable, S=Sobresaliente. En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de alumnos:

Grupo 1 I A A N N S S I I I A A A N S S I A A S S S S

Grupo 2 S S I I A N A N I I S N A S I N N

¿Qué grupo ha obtenido mejores notas? ¿Cuál sería el promedio más apropiado para representar estos datos? (Godino, 1999).

b) Si las siguientes figuras se interpretan como sujetos en una investigación, ¿Cuál de ellas corresponde a la mediana y cuál a la moda?(Almaguer 2000, p. 358)



Respecto a las variables ordinales, corresponde a una escala de medida de intervalo o razón. Por tanto, es siempre más adecuado usar la mediana como medida de centralización para este tipo de casos.

Cuando se estudian variables cualitativas ordinales, las diferencias del valor numérico de la variable no corresponden a diferencias de la magnitud medida y la mediana puede representar los datos más coherentemente que la media. Por ejemplo, al considerar el orden de llegada a la meta en una competición. Este es un caso particular de un tipo de situaciones más general y abstracto –el campo de problemas de reducción de datos ordinales-, común en muchas aplicaciones de la estadística, y, en particular, cuando queremos realizar comparaciones entre dos conjuntos de datos ordinales. Cuando la variable que queremos resumir viene medida en una escala ordinal, incluso aunque codificásemos los datos como valores numéricos, los cálculos con los mismos, por ejemplo, para representar los datos por la media aritmética, serían inapropiados.

La solución pasa por ordenar los datos y tomar como representante del conjunto de datos el valor de la variable que ocupa la posición central, porque hay

tantos valores inferiores como superiores a éste. Aunque podría haberse utilizado también la moda como representante de este conjunto de datos, la moda sólo tiene en cuenta la frecuencia de aparición de un valor de la variable, pero no su ordenación. La mediana proporciona, por tanto una información más completa que la moda cuando es posible calcularla.

Anexo 3

Campos de problemas asociados a la moda

CMO1. Obtener como valor representativo de una colección de datos, el más frecuente de ellos, en situaciones en las que lo que interesa fundamentalmente es el valor dominante del conjunto. Por ejemplo, se pide conocer la edad predominante de un grupo de estudiantes, que se representa en una tabla de frecuencias (Almaguer 2000, p 353).

En un grupo de secundaria se preguntó a los alumnos sobre sus años cumplidos, porque se deseaba conocer la edad que predominaba en el grupo; se obtuvieron las siguientes respuestas:

11 12 12 12 12 13 13 13 13 13
13 13 13 13 13 13 13 13 13 13
14 14 14 14 14 14 14 14 14 14
14 15 15 15 15 15 15 16 16 16

Edad	Frecuencia
11	1
12	4
13	15
14	11
15	6
16	3
Total	40

Como indica Calot (1988), la moda es una característica de tendencia central que es fácil de calcular, puesto que sólo necesita la clasificación de las observaciones y posee un significado concreto como valor dominante. La moda depende de todas las observaciones sólo por su frecuencia relativa y no por su valor. Su mayor inconveniente es que si la variable es continua no está bien definida, ya que la clase modal dependerá de la amplitud de los intervalos de clase. Además, algunas distribuciones pueden presentar varias modas. Pero, en algunos casos, se utiliza por su fácil cálculo, si no se requiere una gran precisión.

CMO2. Encontrar el valor representativo en datos cualitativos. Por ejemplo:

Los siguientes datos muestran las dificultades encontradas para llevar a cabo un cierto tipo de programas de salud en Florida. ¿Cuál considerarías la "barrera típica" ¿Por qué? (Johnson, 1992, pg. 45)

Barrera	Número	Porcentaje
Falta de apoyo administrativo	10	43,5
Tiempo	5	21,7
Dinero	4	17,4
Apatía	3	13,1
Falta de compensación	1	4,3
Total	23	100

En los datos cualitativos la moda es la única medida de posición central que es posible calcular. Este es el caso del ejemplo anterior.

Es importante notar que el cálculo de la media y mediana no tendría sentido en este caso aunque los datos se codifiquen como números, la transformación no

conserva la escala de medida, ya que se pasa de datos cualitativos a numéricos, y la media y mediana no están definidas para datos cualitativos.

Otros ejemplos de medidas de posición central se muestran más adelante como recomendados para trabajar con los estudiantes.

Anexo 4

Otros ejemplos de las medidas de posición central mostrados en Cobo, 2003 que pueden ser adaptados al contexto en el que se desempeñe el docente.

1. Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en Colombia es 2.2 hijos por familia.

a) Explica qué significa para ti esta frase.

b) Se han elegido 10 familias colombianas y el número medio de hijos entre las 10 familias es de 2.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿Cuántos hijos podrán tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las 10 familias sea 2.2? Justifica tu respuesta.

2. María y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada fin de semana una media de 4 horas a hacer deporte.

¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?

María y Pedro dedican además 1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas. ¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican cada fin de semana, entre las dos actividades: hacer deporte y escuchar música?

3. Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina regalaron a los que llevaban menos. ¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue mayor, menor o igual a la recibida por los que habían traído poca? ¿Por qué piensas eso?

4. Tenemos seis números y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma entre *seis*. El resultado es 4. ¿Te parece posible? ¿Por qué?

5. El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24. ¿Cuál es el peso del niño mediano? ¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg? En este caso, ¿Sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? ¿Por qué?

6. Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva cierto número de caramelos. Entre todos llevan una media de 11 caramelos por persona.

¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?

Lucía _____ Juan _____ Pablo _____

¿Es la única posibilidad? Si__ No__ Explica cómo has obtenido tus resultados.

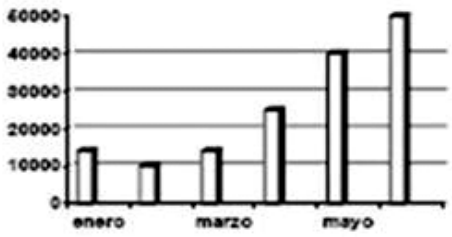
Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora la media de caramelos por chico? Explica tu resultado.

7. Nueve estudiantes han pesado un objeto en la clase de ciencias, usando la misma escala. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

6.2, 6.3, 6.0, 15.2, 6.2, 6.1, 6.5, 6.2, 6.1, 6.2.

Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿Qué harías para calcularlo?

8. Observa el siguiente diagrama de barras que muestra las ventas de bocadillos de la empresa *Bocatta* durante los últimos 6 meses del año pasado:



Dar un valor aproximado del número medio de bocadillos que se vende al mes.

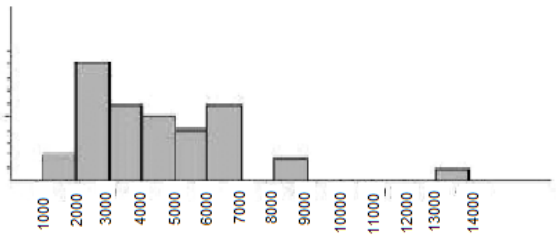
Dar un valor aproximado de la mediana del número de bocadillos que se vendieron por mes.

9. El siguiente conjunto de datos refleja las edades en que contrajeron matrimonio una muestra de 100 mujeres.

Edad	Frecuencia
15-19	4
20-24	38
25-29	28
30-34	20
35-39	8
40-44	1
45-49	1

¿Cuál es la media, mediana y moda de la edad de estas mujeres? Realiza los cálculos necesarios.

10. Pedro piensa que en el siguiente gráfico, la mediana te dice que una mayoría de estudiantes gasta alrededor de 4700 pesos cada semana en comida.



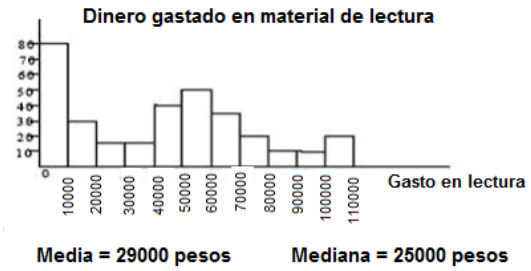
Gasto semanal en comida de un grupo de estudiantes Media = 4530 pesos.

Si ___No ___ ¿Por qué?

11. Juana piensa que, en el gráfico anterior, el alto valor de 13300 pesos debería quitarse del conjunto de datos antes de calcular media, mediana y moda.

Si___ No ___ ¿Por qué?

12. Un grupo de estudiantes hizo este otro histograma del dinero gastado cada semana en material de lectura.



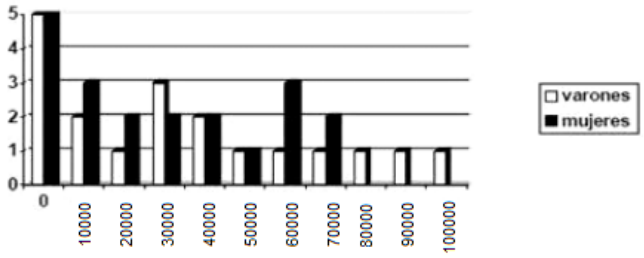
Francisco dijo que es difícil describir el dinero típico gastado en material de lectura en el gráfico anterior, porque la mayor parte de los estudiantes no gastaron nada o muy poco y un segundo grupo gastó entre 50000 y 60000 pesos cada semana. Él piensa que en este caso la media es un indicador pobre del promedio y elige usar la mediana en su lugar para representar el gasto semanal "promedio" en material de lectura.

Si____ No ____ ¿Por qué?.

13. Manuel dice que esta distribución tiene dos modas y sugiere que puedes obtener más información de estos datos si los divides en dos subgrupos y calculas el promedio en cada grupo por separado.

Si____ No ____ ¿Por qué?

14. Antonio quiere investigar las diferencias en los hábitos de gasto en varones y mujeres. Compara las cantidades gastadas en material de lectura en varones y mujeres, construyendo los gráficos siguientes:



Antonio cree que sus gráficos muestran que los varones y mujeres tienden a gastar diferentes cantidades de dinero en material de lectura.

Si___ No ___ ¿Por qué?.

CAPÍTULO 6

Referencias

Almaguer, G. (2000). *Matemáticas 3. Cuaderno de prácticas y tareas*. México: Limusa.

Alvarado, H. (2007). *Significados Institucionales y personales del teorema central del límite en la enseñanza de estadística en ingeniería*. España.

Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo.* Trillas.

Barr, G. V. (1980). *Some student ideas on the median and mode*. Teaching Statistics,2 , 38-41.

Batanero, C. (2000). *Significado y Comprensión de las Medidas de Posición Central*. Granada , España.

Batanero, C. *¿Por qué y cómo enseñar Estadística?* Recuperado el 25 de mayo de 2011, de Estadísticas Batanero: www.ugr.es/~batanero/

Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.). (2011). *Estadística con Proyectos*. Departamento de Didáctica de la Matemática.

Batanero, C., & Díaz, C. (2004). *El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la Estadística*. Aspectos didácticos de las matemáticas , 125-164.

Batanero, C. y Godino, J. D. (2001). *Análisis de datos y su didáctica*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Batanero, C., & Godino, J. D. (2002). *Estocástica y su Didáctica para Maestros*. España: Reprodigital.

Brouseau, G. (1999). "*Educación y Didáctica de las Matemáticas",* en Educación Matemática. México.

Burrill, G. y Camden (Eds.) (2006). *Curricular development in statistics education: International Association for Statistical Education 2004 Roundtable.* Voorburg: International Association for Statistical Education. On line: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/.

Cai, J. (1995). *Beyond the computational algorithm. Students'understanding of average concept. Proceeding of the 19th PME Conference* (págs. 144-151). Recife, Brasil: L. Meira.

Calot G. (1988). *Curso de estadística descriptiva*. Madrid: Paraninfo.

Carr, W. y Kemmis, S. (1988). Teoría crítica de la enseñanza. Barcelona: Martínez Roca.

Carvalho, C. (1998*). Tarefas estadísticas e estratégicas de respota. Portugal.*

Carvalho, C. (2001*). Interaçao entre pares. Contributos para a promoçao do desenvolvimiento lógico e do desempenho estatístico no 7ª ano de escolaridade*. Lisboa.

Cisneros, J. W. (2007). *Pensamiento Aleatorio y Sistema de Datos*. Medellín: Artes y Letras Ltda (Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia).

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. VA:N.C.T.M.: Reston.

Fernández-Fernández, S., Cordero-Sánchez, J.-M., & Córdoba-Largo, A. (1996). *Estadística Descriptiva*. Madrid: ESIC.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education*

(GAISE) report: A Pre-K-12 curriculum framework. Alexandria, VA: American Statistical Association.

Freire, P. (1992). *Pedagogía del oprimido*. Madrid: Siglo XXI.

Gal, I. (2002). *Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsabilities*. International Statistical Review , 70 (1), 1-25.

Gattuso, L., & Mary, C. (1998). *Development of the concept of weighted average among highschool students. Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics* (págs. 685-691). Singapur: Pereira-Mendoza.

Godino, J. D. (1999) *Análisis epistémico, semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática* (www.ugr.es/~jgodino/semioesp/aepistemico.htm).

Gollete, G., & Lessard. (1988). *La investigación – acción. Funciones, fundamentos e instrumentación*. Barcelona: Alertes.

Graham, A. (1987). *Statistical investigations in the secondary school.* Cambridge: The Open University Centre for Mathematics Education.

Johnson, R. (1992). *Elementary statistics.* Boston: PWS Kent, Co.

Merino, B. C. (2003). *Significado de las medidas de posicion central para los estudiantes de secundaria.* Granada: Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada.

Mesa-Betancur, O. (1994). *Criterios y Estrategias para la Enseñanza de las Matemáticas.* Medellín: Centro de Pedagogía Participativa.

Moore, D. S. (1995). *The basic practice of statistics*. New York: Freeman.

Nacional, M. d. (2005). *Estánderes básicos de Matemáticas y Lenguaje*. Santafé de Bogotá: Cooperativa editorial Magisterio.

Nacional, M. d. (1998). *Lineamientos Currículares para Matemáticas*. Santafé de Bogotá: Cooperativa editorial Magisterio.

Plackett, R. L. (1970). *The principle of the arithmetic mean. En E. S. Pearson y M. Kendall (Eds.), Studies in the history of statistics and probability* (v.1, pp. 21-126). London, Charles Griffin.

Ramayo, C. M. (2009). *Una propuesta didáctica sobre la media aritmética, la mediana y representatividad*. Mérida(México).

Russell, S. J., & Mokros, J. R. (1991). *What's tipical?: children's ideas about average. En D. Proceedings of the third International Conference on Teaching Statistics (*págs. 307-313). Voorburg,Holanda: Vere-Jones.

Shaughnessy, J. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and Directions en Grouws D. A. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and learning*, New York: Macmillan Publishing Company, pp. 465-494. (Editado y traducido por Ernesto Sánchez, Gabriel Yánez y Roberto Ávila).

Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. Educational Researcher , 14-23.

Watson, J. M., & Mortiz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. Mathematical Thinking and Learning,2 , 11-50.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). *Pensamiento Estadístico en la Investigación Empírica*. International Statistical Review , 67 (3), 223-248.